This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

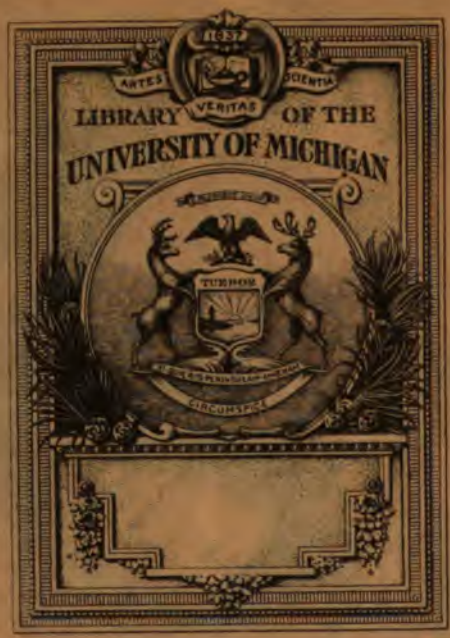
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TURRIM

NON
CIRCULATING

QA
35
.C211

COURS
DE
MATHÉMATIQUE.

Première Partie.

ÉLÉMENS
D'ARITHMÉTIQUE.

PAR M. CAMUS, Charles Etienne Louis, 1699–1768

De l'Académie Royale des Sciences, Examinateur des Ingénieurs, Professeur & Sécrétaire Perpétuel de l'Académie Royale d'Architecture, Honoraire de l'Académie de Marine.

NOUVELLE ÉDITION.

A PARIS,
De l'Imprimerie de BALLARD, Seul Imprimeur du Roi pour la Musique, & Noteur de la Chapelle de Sa Majesté, rue S. Jean-de-Beauvais, à Sainte Cécile.

M. D. CC. LIII.
Avec Approbations & Privilège du Roi.

A MONSEIGNEUR

LE COMTE

D'ARGENSON,

MINISTRE,

SÉCRETAIRE D'ÉTAT,

ayant le Département de la Guerre.

MONSEIGNEUR,

Le Traité que j'ai l'honneur de vous préſenter eſt la premiére Partie d'un Cours de Mathématique, où vous m'avez ordonné

de réunir les Elémens des Sciences propres à un Ingénieur. Je m'eſtimerai heureux, MONSEIGNEUR, *ſi cet Eſſai eſt conforme aux vues que vous nous communiquez dans les Aſſemblées de l'Académie Royale des Sciences; & ſi, par mon zéle pour la continuation de l'Ouvrage, je puis répondre aux ſoins que vous donnez à tout ce qui intéreſſe l'Etat Militaire du Royaume, & particuliérement un Corps d'Officiers dans leſquels le Service du Roi demande des Talens dont vous avez toûjours été le Protecteur.*

Je ſuis avec un profond reſpect,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéiſſant
Serviteur CAMUS.

Hist. of Sci
Vaugondy
4-7-24
9984
2 Vols

PRÉFACE.

LORSQUE M. le Comte d'Argenſon a bien voulu me charger de l'examen des ſujets qui ſe préſentent pour être reçus ingénieurs, il a fixé le degré de connoiſſance qu'il falloit exiger de la part des aſpirans: il a même eu la bonté d'entrer dans tous les détails qui regardent leur inſtruction: & pour leur épargner la lecture d'un trop grand nombre de livres avant l'examen; il m'a ordonné de réunir dans un même ouvrage traité ſynthétiquement toute la théorie dont un ingénieur peut avoir beſoin.

C'eſt dans cet eſprit que, pour exécuter les ordres de ce Miniſtre, j'ai compoſé un cours de mathématique élémentaire qui comprend l'Arithmétique, la Géométrie, la Méchanique ſtatique & l'Hydraulique. Les leçons que j'ai données aux écoles de l'Académie royale d'architecture, m'ont fourni le moyen de remplir mon objet plûtôt qu'il ne m'auroit été poſſible de le faire, ſi je n'avois trouvé des matériaux dans mes traités.

Quoiqu'avec le ſecours des différens livres d'arithmétique que nous avons, l'on puiſſe appliquer le calcul numérique à tout ce qui a rapport aux fonctions d'un ingénieur, j'ai cependant jugé convenable d'en faire un nouveau: Les applications qu'on trouvera dans la ſuite de l'ouvrage, de pluſieurs principes généraux qui, dans l'ordre naturel, doivent être établis en parlant du calcul numérique, feront voir que je

n'ai pû m'en diſpenſer. D'ailleurs on remarquera que je me ſuis attaché à développer des méthodes qui juſqu'ici n'ont été expliquées que fort ſuperficiellement.

Le Traité d'Arithmétique, par lequel je commence le cours de mathématique que j'entreprends de donner, eſt partagé en neuf livres.

Dans le premier, j'expoſe la nature des nombres en général, des parties décimales, l'art de la numération & les principes généraux ſur leſquels l'Arithmétique eſt fondée.

Toutes les opérations de l'Arithmétique pouvant être réduites à l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication & la Diviſion; j'explique dans le ſecond livre les méthodes pour faire ces quatre opérations ſur les nombres incomplexes qui ſont les plus ſimples; & je les applique en même temps aux nombres qui contiennent des parties décimales.

Comme les opérations que j'enſeigne dans le ſecond livre, ne peuvent pas ſuivant l'ordre naturel être appliquées aux grandeurs complexes, ſans donner une idée des fractions; je traite dans le troiſiéme des fractions, de leurs réductions, des différentes préparations qui les rendent ſuſceptibles de l'Addition & de la Souſtraction, de la maniére de les ajoûter, de les ſouſtraire, de les multiplier & de les diviſer.

J'applique enſuite dans le quatriéme livre les opérations de l'Arithmétique aux nombres complexes. Quoique les ſurfaces, les ſolides & la maniére dont ces étendues ſont engendrées & décompoſées, appartiennent proprement à la Géométrie; j'ai cependant expliqué dans les

chapitres de la Multiplication & de la Diviſion des nombres complexes, comment ces deux eſpéces d'étendue ſont produites par la Multiplication & décompoſées par la Diviſion des nombres ſubſtitués aux lignes; & je me ſuis particulièrement attaché à déterminer les vraies dénominations des différentes unités dont les produits & les quotiens ſont compoſés.

Dans le cinquiéme livre, je traite des Rapports & des Proportions en général, des Regles de Trois, de Compagnie, de Fauſſes poſitions; & je me borne, en parlant des Proportions, à ce qui eſt néceſſaire pour l'intelligence de ces différentes régles & des autres matiéres compriſes dans la ſuite de ce traité.

Dans le ſixiéme, j'explique les Regles d'Alliage; & je m'attache non-ſeulement à diſtinguer entre les différentes queſtions qui peuvent être propoſées, celles qui ſont déterminées, de celles qui ſont indéterminées; mais encore à faire connoître comment ces dernieres peuvent être réduites, par des circonſtances particulieres, à un certain nombre de ſolutions.

Dans le ſeptiéme, après avoir démontré comment & de quelles parties les Quarrés & les Cubes ſont compoſés, je donne les méthodes pour en extraire les Racines exactes; ou pour en approcher autant qu'on peut le déſirer, lorſque les nombres propoſés ne ſont pas des quarrés ou des cubes parfaits.

Dans le huitiéme, je traite des Proportions & Progreſſions arithmétiques, des Progreſſions géométriques & des Logarithmes auſquels ces progreſſions ſervent de préparation. L'uſage

qu'on peut faire des logarithmes pour calculer de grands nombres, me perſuade qu'on ne les trouvera point déplacés dans une Arithmétique deſtinée à des perſonnes qui s'en ſerviront néceſſairement dans la ſuite de leurs études.

Enfin je termine ce traité par un neuviéme livre qui contient une doctrine abrégée des Changemens d'ordre ou Permutations, & des Combinaiſons dans trois différentes hypothèſes.

On pourra être ſurpris de ce qu'ayant à compoſer un cours de mathémathique élémentaire, je n'ai pas donné le calcul littéral en même temps que le calcul numérique, à l'exemple de quelques auteurs. Mais ayant à traiter par la ſeule ſynthèſe les principales parties dont un ingénieur doit être inſtruit, j'ai crû devoir réſerver le calcul littéral pour l'Analyſe.

Je préviens donc ici que je ne parlerai du calcul littéral & de l'analyſe, qu'après avoir rempli mes engagemens, & donné les traités que je viens d'annoncer en ne faiſant uſage que de la ſynthèſe. Je travaillerai avec la plus grande aſſiduité à contribuer au progrès que les ingénieurs deſirent de faire dans les ſciences. Ma plus grande ſatisfaction ſera de partager par mes veilles l'ardeur que témoignent ces Meſſieurs de ſoutenir la réputation que leur corps s'eſt acquiſe, & de faire valoir les ſoins dont le Miniſtre eſt occupé pour rendre leurs talens utiles à l'Etat & agréables au Roi.

EXTRAIT DES REGISTRES de l'Académie royale des Sciences.

MEſſieurs, NICOLE & CLAIRAUT, qui avoient été nommés pour examiner un ouvrage de M. Camus intitulé *Cours de Mathématique élémentaire à l'uſage des Ingénieurs*, ayant fait leur rapport de la partie de ce Cours qui contient l'Arithmétique, & qui en doit compoſer le premier volume, l'Académie a jugé cette partie de l'ouvrage digne de l'impreſſion. En foi de quoi j'ai ſigné le préſent Certificat. A Paris, le 21. Mai 1749.

GRANJEAN DE FOURCHY, Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

EXTRAIT DES REGISTRES de l'Académie royale d'Architecture.

MOnſieur CARTAUD qui avoit été chargé par l'Académie royale d'Architecture, d'examiner des *Elémens d'Arithmétique*, faiſant partie d'un Cours de Mathématique compoſé par M. Camus, Profeſſeur de Mathématique & Secrétaire de l'Académie, en ayant fait ſon rapport à la Compagnie, Elle a été d'avis que ce Traité, pouvant être très-utile au Public, étoit digne de l'impreſſion. A Paris, ce 20 Mai 1749.

GABRIEL.

EXTRAIT DES REGISTRES de l'Académie de Marine.

Du 15. Février 1753.

MOnſieur DECHEZAC & M. BORY qui avoient été nommés par l'Academie de Marine pour examiner les quatre premieres parties du *Cours de Mathématique* de M. Camus, en ayant fait leur rapport. La Compagnie à jugé que le Public verroit avec plaiſir la réimpreſſion d'un Ouvrage auquel il a déja accordé ſon approbation, & qui ne ſera pas moins utile à la Marine qu'au Corps en faveur duquel il a été compoſé. A Breſt, leſdits jours & an ci-deſſus.

CHOQUET, Secrétaire de l'Académie de Marine.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE : A nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra ; SALUT. Notre *Académie Royale des Sciences* Nous a très-humblement fait expoſer que depuis qu'il Nous a plu lui donner, par un Réglement nouveau, de nouvelles marques de notre affection, elle s'eſt appliquée avec plus de ſoin à cultiver les Sciençes qui font l'objet de ſes exercices ; en ſorte qu'outre les Ouvrages qu'elle a déja donnés au public, elle ſoit en état d'en produire encore d'autres : S'il Nous plaiſoit lui accorder de nouvelles Lettres de Privilége, attendu que celles que Nous lui avons accordées en datte du 6 Avril 1693, n'ayant point eu de terme limité ; ont été déclarées nulles par un Arrêt de notre Conſeil d'Etat du 13 Août 1704 ; celles de 1713 & celles de 1716 étant auſſi expirées ; & deſirant donner à notredite Académie en corps & en particulier, & à chacun de ceux qui la compoſent, toutes les facilités & les moyens qui peuvent contribuer à rendre leurs travaux utiles au Public, Nous avons permis & permettons par ces préſentes à notredite Académie, de faire vendre ou debiter par tous les lieux de notre obéiſſance, par tel Imprimeur ou Libraire qu'elle voudra choiſir, toutes les *Recherches ou Obſervations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Aſſemblées de notredite Académie Royale des Sciences ; comme auſſi les Ouvrages, Mémoires ou Traités de chacun des particuliers qui la compoſent & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner leſdits Ouvrages & jugé qu'ils ſont dignes de l'impreſſion* ; & ce pendant le tems de quinze années conſécutives, à compter du jour de la datte deſdites préſentes : Faiſons défenſes à toutes ſortes de perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere, dans aucun lieu de notre obéiſſance ; Comme auſſi à tous Imprimeurs, Libraires & autres d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, debiter, ni contrefaire aucun deſdits Ouvrages ci-deſſus ſpécifiés, en tout ni en parties, ni d'en faire aucuns extraits ſous quelque prétexte que ce ſoit d'augmentation, correction, changement de titre, feuilles même ſéparés ou autrement ſans la permiſſion expreſſe & par écrit de notredite Académie ou de ceux qui auront droit d'elle & de ſes ayans cauſe ; à peine de confiſcation des exemplaires contrefaits, de dix mille livres d'amande contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre

siers au Dénonciateur, & de tous dépens, dommages & intérêts, A la charge que ces préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la datte d'icelles; que l'impreſſion deſdits Ouvrages ſera faite dans notre Royaume & non ailleurs, & que notredite Académie ſe conformera en tout aux Reglemens de la Librairie, & notamment à celui du dix Avril 1725; & qu'avant de les expoſer en vente les Manuſcrits ou Imprimés qui auront ſervi de copie à l'impreſſion deſdits Ouvrages, ſeront remis dans le même état, avec les Approbations & Certificats qui en auront été donnés ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Garde des Sceaux de France, le Sieur CHAUVELIN; & qu'il en ſera enſuite remis deux exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur CHAUVELIN, le tout à peine de nullité des préſentes: Du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir notredite Académie ou ceux qui auront droit d'elle & ſes ayans cauſes pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie deſdites préſentes qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin deſdits Ouvrages ſoit tenue pour duement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers & Secrétaires, foi ſoit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent de faire pour l'exécution d'icelles, tous Actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant Clameur de Haro, Charte Normande, & lettres à ce contraires. CAR tel eſt notre plaiſir. DONNE' à Fontainebleau le douziéme jour du mois de Novembre, l'an de grace mil ſept cent trente-quatre, & de notre regne le trente-huitiéme. Par le Roi en ſon Conſeil,

SAINSON.

Regiſtré ſur le Regiſtre VIII, de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, No. 792 fol. 775. conformément au Réglement de 1723. qui fait défenſe Art. 4 à toutes perſonnes de quelque qualité qu'elles ſoient, autre que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter, & faire afficher aucuns Livres, pour les vendre en leurs noms, ſoit qu'ils s'en diſent les Auteurs ou autrement; & à la charge de fournir les Exemplaires preſcrits par l'Art. 108 du même Réglement. A Paris le 15 Novembre 1734. G. MARTIN, *Syndic.*

EXPLICATION

DES NOMS DES PROPOSITIONS

Qui compoſent ce Traité.

CE Traité eſt compoſé de ſix ſortes de Propoſitions, de Définitions, *de* Théorêmes, *de* Problêmes, *de* Corollaires, *de* Remarques *& de* Scholies.

Une Définition *eſt l'explication de ce qu'on entend par un mot dont on veut faire uſage.*

Le Théorême *eſt une propoſition dont il faut prouver la vérité.*

Le Problême *eſt une propoſition dans laquelle il s'agit de faire une opération, ou de découvrir une vérité inconnue.*

Le Corollaire *eſt une conſéquence tirée d'un Théorême démontré ou d'un Problême réſolu.*

Les Remarques *ſont des refléxions ſur une ou pluſieurs propoſitions précédentes.*

Le Scholie *eſt auſſi une remarque qui tend à faire voir l'utilité d'une propoſition, ou l'accord de pluſieurs propoſitions précédentes dont on fait la récapitulation.*

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

LIVRE PREMIER.

Des Nombres & des Principes généraux de l'Arithmétique.

CHAPITRE PREMIER.

Des Nombres en général & de l'Unité.

DÉFINITIONS.

L'ARITHMÉTIQUE eſt la Science des Nombres.

On appelle *Nombre* l'aſſemblage de pluſieurs Unités.

On nomme *Unité* tout ce qui eſt conſidéré comme indiviſible, quoiqu'il puiſſe être véritablement diviſé.

On prend pour unité non ſeulement chaque choſe non diviſée ou naturellement indiviſible, comme un homme, un mouton, une étoile, &c. mais encore la collection de pluſieurs choſes de la même eſpece, en les conſidérant comme un tout, par exemple, une armée, un troupeau, une conſtellation; l'on prend

même pour unité l'aſſemblage de pluſieurs choſes de différentes eſpeces, comme un équipage, un habillement, un meuble.

On eſt convenu pour la facilité du commerce, d'employer différentes eſpeces d'unités qui ſont connues de tout le monde. Dans les monnoies l'on a établi pour unités la livre, le ſol, & le denier. Pour meſurer les diſtances & les longueurs, l'uſage & les loix ont établi la toiſe, le pied, le pouce, & la ligne, l'aune, la perche, & pluſieurs autres meſures dont l'étendue eſt fixée par la coutume & par l'autorité du Prince. Dans la meſure des aires ou des ſuperficies l'on prend pour unités la toiſe quarrée, le pied quarré, le pouce quarré, l'aune quarrée, la perche quarrée, l'arpent; & pour rendre les calculs plus faciles, lorſque l'on a beſoin de différentes unités, l'on prend pour unités différentes meſures qui ont toutes la même longueur ſur différentes largeurs, & qui prennent leurs dénominations diſtinctives de leurs largeurs. Nous parlerons plus amplement de ces différentes unités de ſuperficies, lorſque nous traiterons du toiſé des ſurfaces. Dans le toiſé des ſolides on prend pour unités la toiſe cube, le pied cube, le pouce cube, la ligne cube, & différens ſolides qui ont tous pour baſe une toiſe quarrée ſur différentes hauteurs dont ils prennent leurs dénominations diſtinctives, ſans compter quantité d'autres meſures telles que la pinte, le boiſſeau, le ſetier, le muid, &c. qui ne ſont pas partout les mêmes. Enfin chaque eſpece de choſe a une unité particuliere de même nature qu'elle, & dont la grandeur eſt autoriſée par l'uſage.

Les unités dont on vient de parler, & toutes les autres qui ſont relatives à des choſes de quelque eſpece qu'elles puiſſent être, s'appellent *unités concretes.*

Il y a une autre unité qui ne déſigne aucune eſpece de choſe en particulier, & qui eſt applicable à toutes ſortes d'eſpeces : cette unité s'appelle *unité vague* ou *abſtraite* ou *abſolue*, & s'exprime par le mot *un* ou *une fois*.

CHAPITRE II.

Des Nombres & de la Numération.

2 NOus avons dit, dans le Chapitre précédent, qu'un nombre étoit l'aſſemblage de pluſieurs unités, & nous avons ſuffiſamment expliqué ce qu'on entend par unité.

En ajoutant une unité à une autre unité, l'on fait un nombre que l'on nomme *deux* ; en joignant à ce nombre une nouvelle unité, il en réſulte le nombre que l'on appelle *trois*, & en continuant ainſi d'ajouter de nouvelles unités aux nombres déja faits, l'on forme les nombres ſuivants que l'on nomme *quatre, cinq, ſix, ſept, huit, neuf*, &c. Comme l'unité pourra toujours être ajoutée aux nombres que l'on aura faits quelque grands qu'ils puiſſent être, il eſt évident que la ſuite des nombres n'a point de bornes.

Si l'on vouloit exprimer chaque nombre par un mot ou par un caractere particulier, il faudroit donc employer une infinité de mots ou de caracteres, & la vie d'un homme ne ſuffiroit pas pour apprendre à compter juſqu'à cinquante mille qui eſt un fort petit nombre, non ſeulement entre les nombres poſſibles, mais encore entre ceux que l'on eſt dans l'uſage de compter : mais les hommes, & principalement les Mathématiciens obligés de faire uſage de très-grands nombres, ont imaginé l'art de compter avec un

très-petit nombre de mots & de caracteres répétés pluſieurs fois ; cet art ſe nomme *la numération.*

L'on conſidere en général deux ſortes de nombres, les *nombres concrets*, & les *nombres abſtraits* ou *abſolus.*

Lorſque les nombres ſont appliqués à compter pluſieurs unités de quelque eſpece particuliere, on les appelle *nombres concrets ;* par exemple, *deux livres, trois toiſes, quatre chevaux,* ſont des nombres concrets, qui ont pour unités des *livres,* des *toiſes,* des *chevaux.*

Les nombres qui ne ſont appliqués qu'à nombrer des unités vagues, ou abſtraites, tels que ceux-ci, *deux, trois, quatre,* &c. ou plûtôt *deux fois, trois fois, quatre fois,* &c. qui ne comptent aucune eſpece de choſes particulieres, mais qui ſont propres à nombrer des unités de toutes les eſpeces, s'appellent *nombres abſtraits,* ou *nombres abſolus.*

Comme l'on ne connoît de véritables nombres que relativement aux choſes nombrées, les nombres concrets ſont les ſeuls qui exiſtent véritablement par eux-mêmes, & l'on peut dire que les nombres abſtraits ou abſolus n'exiſtent que dans l'eſprit, ou par la maniere dont on conſidere les choſes nombrées.

La conſidération des nombres abſtraits n'eſt pourtant point inutile pour pluſieurs raiſons. Premierement les nombres ne ſont pas moins nombres, pour avoir des unités différentes ; ainſi il eſt indifférent à l'Arithmétique, qui eſt proprement la ſcience des nombres, d'avoir telle ou telle eſpece d'unités à nombrer, enſorte que l'unité vague ou abſtraite, *une fois*, peut être priſe auſſi bien que toutes les unités concretes, pour le principe de compoſition des nombres qui ſont l'objet de l'Arithmétique ; c'eſt même cette eſpece d'unité que l'Arithmétique conſidere véritablement. Secondement il y a des queſtions arithmétiques, dont les réponſes

le réduiſent à des nombres abſtraits, comme celle-ci : *Combien de fois huit écus contiennent-ils quatre écus?* dont la réponſe eſt *deux fois*, qui eſt un nombre véritablement abſtrait. La conſidération des nombres abſtraits ne doit donc point être négligée : elle eſt même abſolument néceſſaire, comme nous le verrons encore dans la ſuite.

Quoiqu'il y ait une infinité de nombres différens ; l'on a trouvé le moyen de les repréſenter tous avec dix caracteres ſeulement différemment combinés & répétés ; & en écrivant à la droite des caracteres qui repréſentent un nombre quel qu'il ſoit, le nom de l'unité, ou le caractere qui marque l'eſpece de l'unité dont ce nombre eſt compoſé, l'on repréſentera telle eſpece de nombre concret que l'on voudra.

Les dix caracteres par leſquels on repréſente tous les nombres, & que l'on appelle *chiffres*,

Sont	0	On les nomme	zéro ou rien
	1		un
	2		deux
	3		trois
	4		quatre
	5		cinq
	6		ſix
	7		ſept
	8		huit
	9		neuf

Avec ces dix caracteres l'on peut ſans aucun art compter depuis rien juſqu'à neuf incluſivement ; & l'on ne pourroit point compter au-delà, ſi l'on n'avoit point d'autre unité que celle de l'eſpece que l'on doit nombrer. Par exemple, ſi les unités dont un nombre doit être compoſé étoient des toiſes, dont l'eſpece de l'unité eſt repréſentée par T, on

pourroit ſeulement compter depuis rien juſqu'à neuf toiſes, en écrivant

0ᵀ	Ce qui ſignifie	rien ou zéro toiſe
1ᵀ		une toiſe
2ᵀ		deux toiſes
3ᵀ		trois toiſes
4ᵀ		quatre toiſes
5ᵀ		cinq toiſes
6ᵀ		ſix toiſes
7ᵀ		ſept toiſes
8ᵀ		huit toiſes
9ᵀ		neuf toiſes

& l'on ne pourroit pas compter au-delà de 9 toiſes, ſi l'on n'avoit point d'autre unité que la toiſe.

Mais outre l'unité de l'eſpece que l'on doit compter, & que nous nommerons *unité principale*, ou *unité de l'eſpece*; par exemple, outre la toiſe qui ſert d'unité principale dans les nombres que nous venons de donner, l'on a imaginé d'autres unités, que nous nommerons *unités collectives*, qui peuvent être comptées depuis rien juſqu'à neuf incluſivement, & moyennant ces unités collectives, on eſt en état de repréſenter tous les nombres poſſibles compoſés de la répétition de l'unité principale, comme on va l'expliquer.

Des Unités.

Lorſque les unités principales ne paſſeront pas le nombre de neuf, & que l'on pourra par conſéquent les écrire avec un ſeul chiffre; le chiffre qui en repréſentera le nombre, ſera nommé *nombre des unités du premier degré*, & la place que ce chiffre occupera ſera nommée la *premiere place*.

Des Dixaines.

De dix unités du premier degré, l'on fait une unité

collective que l'on nomme *dixaine*, ou *unité du ſecond degré*, & l'on en peut compter depuis rien juſqu'à neuf par le moyen de quelqu'un des mêmes chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Pour diſtinguer le chiffre qui compte ces nouvelles *unités du ſecond degré*, de celui qui compte le nombre des *unités du premier degré*, on le met à la ſeconde place immédiatement à gauche de celui qui compte les unités du premier degré, & qui occupe la premiere place, en obſervant toujours de remplir la premiere place par l'un des chiffres qui peut repréſenter le nombre des unités du premier degré, comme on va le voir dans les exemples ſuivans.

1°. Lorſque le nombre des unités que l'on compte, ſe réduit à des *dixaines* ou unités du ſecond degré ſans reſte, & que le nombre de dixaines que l'on a, ne ſurpaſſe pas *neuf*; on met à la premiere place le caractere (0) qui ne compte rien, & qui en ſignifiant qu'il n'y a point d'unités du premier degré, fait tenir la ſeconde place au chiffre qui marque le nombre des unités du ſecond degré, & le détermine à compter cette eſpece d'unité collective plûtôt qu'une autre.

Ainſi	10	Signifient	une dixaine *ou dix*
	20		deux dixaines *ou vingt*
	30		trois dixaines *ou trente*
	40		quatre dixaines *ou quarante*
	50		cinq dixaines *ou cinquante*
	60		ſix dixaines *ou ſoixante*
	70		ſept dixaines *ou ſeptante*
	80		huit dixaines *ou huitante*
	90		neuf dixaines *ou nonante*

Pour exprimer la ſuite des nombres de dixaines on dit, ou du moins on peut dire en nombrant, *dix*, *vingt*, *trente*, *quarante*, *cinquante*, *ſoixante*, *ſeptante*,

huitante, *nonante*; mais hors du calcul on dit & l'on écrit pour les trois derniers nombres de dixaines, *ſoixante & dix*, *quatre-vingt*, *quatre-vingt-dix*.

2°. Puiſqu'en mettant quelqu'un des dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, à la ſeconde place, l'on peut compter les dixaines depuis rien juſqu'à neuf; & qu'en mettant quelqu'un des mêmes chiffres à la premiere place, on peut compter les *unités ſimples* ou *du premier dégré* depuis rien juſqu'à neuf; on peut par le moyen de deux chiffres qui occupent les deux premieres places, compter depuis rien juſqu'à nonante-neuf; c'eſt-à-dire, juſqu'à quatre-vingt-dix-neuf.

Les chiffres qui ſont à la ſeconde place doivent garder les noms des nombres de dixaines qu'ils expriment, & ceux qui ſont à la premiere place doivent pareillement garder les noms des nombres des unités ſimples qu'ils repréſentent. Cependant il en faut excepter quelques nombres dont la prononciation fait une irrégularité, & une exception à la regle générale.

Les nombres	11	devroient s'écrire & ſe prononcer	dix-un	on les écrit & les prononce onze
	12		dix-deux	douze
	13		dix-trois	treize
	14		dix-quatre	quatorze
	15		dix-cinq	quinze
	16		dix-ſix	ſeize
Ceux-ci	17	ſuivent la regle générale on les écrit & on les nomme		dix-ſept
	18			dix-huit
	19			dix-neuf

Pour les nombres ſuivans, depuis vingt repréſenté par 20, juſqu'à ſoixante & neuf repréſenté par 69, on ſuit la regle générale en les écrivant & en les nommant.

Nombres	Noms	Nombres	Noms
20	vingt	50	cinquante
21	vingt & un	51	cinquante & un
22	vingt-deux	52	cinquante-deux
23	vingt-trois	53	cinquante-trois
24	vingt-quatre	54	cinquante-quatre
25	vingt-cinq	55	cinquante-cinq
26	vingt-ſix	56	cinquante-ſix
27	vingt-ſept	57	cinquante-ſept
28	vingt-huit	58	cinquante-huit
29	vingt-neuf	59	cinquante-neuf
30	trente	60	ſoixante
31	trente & un	61	ſoixante & un
32	trente-deux	62	ſoixante & deux
33	trente-trois	63	ſoixante & trois
34	trente-quatre	64	ſoixante & quatre
35	trente-cinq	65	ſoixante & cinq
36	trente-ſix	66	ſoixante & ſix
37	trente-ſept	67	ſoixante & ſept
38	trente-huit	68	ſoixante & huit
39	trente-neuf	69	ſoixante & neuf
40	quarante		
41	quarante & un		
42	quarante-deux		
43	quarante-trois		
44	quarante-quatre		
45	quarante-cinq		
46	quarante-ſix		
47	quarante-ſept		
48	quarante-huit		
49	quarante-neuf		

A l'égard des trente nombres ſuivans, que l'on repréſente par deux chiffres, on peut ſuivre la regle générale dans les calculs, en retenant les noms de *ſeptante*, *huitante*, *nonante*, pour exprimer *ſept dixaines*, *huit dixaines*, *neuf dixaines*; mais hors les calculs, on ſuit l'irrégularité que l'uſage a introduite, en diſant *ſoixante & dix* pour *ſeptante*, *quatre-vingt* pour *huitante*, *quatre-vingt-dix* pour *nonante*: & comme pour les ſix nombres au-deſſus de dix, on ne dit pas *dix un*, *dix deux*, *dix trois*, *dix quatre*, *dix cinq*, *dix ſix*, mais que l'on dit & que l'on écrit *onze*, *douze*, *treize*, *quatorze*, *quinze* & *ſeize*, on ne dit pas non plus *ſoixante & dix un*, *ſoixante & dix deux*... *ſoixante & dix ſix*, ni *quatre-vingt-dix un*, *quatre-vingt-dix deux*... *quatre-vingt-dix ſix*; mais on dit & l'on écrit *ſoixante & onze*, *ſoixante & douze*... *ſoixante & ſeize*, *quatre-vingt-onze*, *quatre-vingt-douze*... *quatre-vingt-ſeize*.

On voit dans la table ſuivante les deux noms que l'on peut donner à chacun des trente nombres qui ſuivent 69.

Nombres	*Noms dans le calcul.*	*Noms ſuivant l'uſage.*
70	ſeptante	ſoixante & dix
71	ſeptante-un	ſoixante & onze
72	ſeptante-deux	ſoixante & douze
73	ſeptante-trois	ſoixante & treize
74	ſeptante-quatre	ſoixante & quatorze
75	ſeptante-cinq	ſoixante & quinze
76	ſeptante-ſix	ſoixante & ſeize
77	ſeptante-ſept	ſoixante & dix-ſept
78	ſeptante-huit	ſoixante & dix-huit
79	ſeptante-neuf	ſoixante & dix-neuf
80	huitante	quatre-vingt
81	huitante-un	quatre-vingt-un
82	huitante-deux	quatre-vingt-deux
83	huitante-trois	quatre-vingt-trois
84	huitante-quatre	quatre-vingt-quatre
85	huitante-cinq	quatre-vingt-cinq
86	huitante-ſix	quatre-vingt-ſix
87	huitante-ſept	quatre-vingt-ſept
88	huitante-huit	quatre-vingt-huit
89	huitante-neuf	quatre-vingt-neuf
90	nonante	quatre-vingt-dix
91	nonante-un	quatre-vingt-onze
92	nonante-deux	quatre-vingt-douze
93	nonante-trois	quatre-vingt-treize
94	nonante-quatre	quatre-vingt-quatorze
95	nonante-cinq	quatre-vingt-quinze
96	nonante-ſix	quatre-vingt-ſeize
97	nonante-ſept	quatre-vingt-dix-ſept
98	nonante-huit	quatre-vingt-dix-huit
99	nonante-neuf	quatre-vingt-dix-neuf

Des Centaines.

De même que la ſomme de dix *unités du premier degré* compoſe une *unité du ſecond degré*, l'aſſemblage de dix *unités du ſecond degré*, fait une *unité du troiſiéme degré*, que l'on nomme *centaine* ou *cent*, & l'on donne la troiſiéme place vers la gauche aux chiffres qui expriment les nombres de ces nouvelles unités.

On peut encore compter ces nouvelles unités de centaines depuis rien juſqu'à neuf, avec les mêmes caracteres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; & comme l'on peut auſſi compter avec les mêmes chiffres les dixaines depuis rien juſqu'à neuf, & les unités depuis rien juſqu'à neuf; il eſt clair que l'on eſt en état de compter tous les nombres depuis rien juſqu'à *neuf cents nonante-neuf*, que l'uſage oblige de nommer *neuf cents quatre-vingt-dix-neuf*.

Les différens nombres de centaines n'ont point de noms particuliers, on les déſigne par le nom *cent*, précédé du mot qui en exprime le nombre, comme on le voit dans cet exemple.

Nombres	Noms
100	cent
200	deux cents
300	trois cents
400	quatre cents
500	cinq cents
600	ſix cents
700	ſept cents
800	huit cents
900	neuf cents

L'énoncé d'un nombre repréſenté par trois chiffres n'a aucune nouvelle difficulté. On commence par énoncer le nombre des *cents* exprimé par le chiffre qui eſt à la troiſiéme place; enſuite on prononce le

nom du nombre exprimé par les deux chiffres qui occupent la ſeconde & la prémiere place, en ſuivant la regle générale ou l'uſage, & ayant égard aux exceptions que nous avons fait remarquer, comme dans ces exemples.

Nombres	Noms
364	trois cents ſoixante-quatre
576	cinq cents ſeptante-ſix, *ou cinq cents ſoixante & ſeize*
193	cent nonante-trois, *ou cent quatre-vingt-treize*
916	neuf cents ſeize
807	huit cents ſept
290	deux cents nonante, *ou deux cents quatre-vingt-dix*

Nous ferons ſeulement remarquer que ſi l'on trouve (o) qui ne marque rien, à la place des dixaines, & qui ſignifie que l'on n'a point de dixaines à compter, il faudra exprimer le nombre des unités auſſitôt après celui des cents qui ſont à la troiſiéme place, comme dans le cinquiéme exemple ; & ſi le caractere (o) ſe trouve à la premiere place, il marquera qu'il n'y a point d'unités ſimples : ainſi il faudra ſeulement exprimer le nombre des centaines & celui des dixaines, comme on le voit dans le dernier exemple.

Des Unités collectives qui ſont de degrés ſupérieurs au troiſiéme.

De dix *unités du troiſiéme degré* nommées *centaines*, l'on fait une *unité du quatriéme degré*, que l'on nomme *mille*. Ces nouvelles unités ſe peuvent compter comme les autres unités collectives dont nous avons parlé, depuis rien juſqu'à neuf, & le chiffre qui en repréſente le nombre ſe met toujours à la quatriéme place, à la gauche de celui des *cents*.

En continuant ainſi de faire de nouvelles unités collectives dont chacune ſoit compoſée de dix unités du degré précédent, on aura une progreſſion d'unités décuples les unes des autres, qui n'aura point de bornes, & l'on pourra par ſon moyen repréſenter tous les nombres poſſibles, quelque grands qu'ils ſoient, en ſe ſervant ſeulement des dix caracteres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Les trois chiffres qui occupent les trois premieres places ont des noms particuliers. On appelle *nombre ſimple* celui de la premiere place, *dixaine* celui de la ſeconde place, & *centaine* celui de la troiſiéme place. On auroit pu de la même maniere donner des noms particuliers aux unités des degrés ſupérieurs; mais comme ces nouveaux noms auroient chargé la mémoire inutilement, & qu'il auroit été trop difficile de prononcer un grand nombre de mots différens dans un ordre précis, l'on a donné aux trois chiffres ſuivans qui occupent la quatriéme, la cinquiéme & la ſixiéme place, les mêmes noms de *nombre*, *dixaine*, *centaine*, & ainſi des autres; enſorte que les chiffres qui repréſentent un grand nombre étant partagés en tranches de trois chiffres en trois chiffres, en commençant par la droite, chaque tranche aura un nombre d'unités ſimples dans ſa premiere place à droite, un nombre de dixaines dans ſa ſeconde place, & un nombre de centaines dans ſa troiſiéme place. Il en faut pourtant excepter la derniere tranche vers la gauche, qui n'eſt pas toujours compoſée de trois chiffres, & qui n'en contient ſouvent qu'un ou deux; ſavoir un nombre d'unités, ou un nombre d'unités avec des dixaines.

Pour ne point confondre toutes ces tranches, & pour les diſtinguer les unes des autres, l'on a donné au premier chiffre de chacune un nom particulier, qui eſt auſſi le nom de cette tranche.

Le premier chiffre de la premiere tranche s'appelle le nombre des unités ſimples, & la premiere tranche qui contient auſſi les dixaines & les centaines d'unités ſimples, ſe nomme *la tranche des unités ſimples.*

Le premier chiffre de la deuxiéme tranche ſe nomme *mille*, & cette ſeconde tranche qui contient auſſi les dixaines & les centaines de mille, s'appelle *la tranche des mille.*

Le premier chiffre de la troiſiéme tranche s'appelle *million*, & cette tranche qui contient auſſi les dixaines & les centaines de millions, s'appelle *la tranche des millions.*

Après la tranche des millions, viennent celles des *billions*, des *trillions*, des *quatrillions*, des *quintillions*, des *ſextillions*, des *ſeptillions*, des *octillions*, des *nonillions*, des *décillions*, &c. qui contiennent chacune leurs unités, leurs dixaines, & leurs centaines.

Les chiffres écrits pour repréſenter un grand nombre, étant ainſi partagés en tranches compoſées de trois chiffres, excepté la derniere ou la plus à gauche, qui peut n'avoir qu'un ou deux chiffres, il eſt extrêmement facile d'énoncer ce nombre; puiſqu'il ſuffit d'exprimer les uns après les autres, en commençant par la gauche, les nombres repréſentés par ces tranches, comme ſi chaque tranche étoit unique; mais il faut avoir attention après l'expreſſion du nombre de chaque tranche, d'exprimer le nom de cette tranche.

Pour faire voir d'un coup d'œil les noms des différentes tranches d'un grand nombre repréſenté par beaucoup de chiffres avec les noms des chiffres de chaque tranche, nous prendrons pour exemple le nombre des grains de ſable qu'Archimede a trouvé qu'il falloit pour compoſer une maſſe égale à celle de la terre, en ſuppoſant qu'il faut mettre dix grains de

ſable bout à bout pour faire le diametre d'un grain de coriandre, qu'il faut dix grains de coriandre pour un pouce, douze pouces pour un pied, cinq pieds pour un pas géométrique, trois mille pas pour une lieue; que le diametre de la terre eſt de deux mille huit cents ſoixante & quatre lieues, & que la circonférence d'un cercle vaut trois fois ſon diametre avec la ſeptiéme partie de ce diametre.

Voici ce nombre de grains de ſable, avec les noms de ſes tranches & les noms des places de chaque tranche.

Noms des places de chaque tranche.			Noms des tranches.
dixaine nombre	71	}	nonillions
centaine dixaine nombre	764	}	octillions
centaine dixaine nombre	546	}	ſeptillions
centaine dixaine nombre	809	}	ſextillions
centaine dixaine nombre	270	}	quintillions
centaine dixaine nombre	857	}	quatrillions
centaine dixaine nombre	142	}	trillions
centaine dixaine nombre	857	}	billions
centaine dixaine nombre	142	}	millions
centaine dixaine nombre	857	}	mille
centaine dixaine nombre	142	}	unités ſimples

Ce prodigieux nombre s'exprime ainſi: ſeptante & un *nonillions* ſept cents ſoixante & quatre *octillions* cinq cents quarante-ſix *ſeptillions* huit cents neuf *ſextillions* deux

deux cents ſeptante *quintillions* huit cents cinquante-ſept *quatrillions* cent quarante-deux *trillions* huit cents cinquante-ſept *billions* cent quarante-deux *millions* huit cents cinquante-ſept *mille* cent quarante-deux *unités* ou *grains de ſable.*

Nous avons ſuffiſamment expliqué comment il faut exprimer un nombre repréſenté par trois chiffres, ſoit qu'il y ait des zéros, ſoit qu'il n'y en ait point. Ainſi l'on eſt en état d'exprimer la valeur de chaque tranche d'un nombre quelconque, lorſque chaque tranche ſera véritablement un nombre; mais il peut arriver qu'une ou pluſieurs tranches ſoient remplies de zéros: dans ce cas, il faudra ſupprimer les noms de ces tranches. Par exemple,

trillions	*billions*	*millions*	*mille*	*unités*
2	800	000	045	003

s'exprime ainſi, deux *trillions* huit cents *billions* quarante-cinq *mille* trois *unités*; où l'on voit que nous ſupprimons le mot de *millions*, dont la tranche entiere eſt occupée par des zéros.

Puiſque ſuivant la loi de la progreſſion des unités collectives, que nous venons d'expliquer, il faut dix unités du premier degré ou de celles qui ſont à la premiere place, pour en compoſer une du ſecond degré ou de celles qui ſont à la ſeconde place; & qu'il en faut dix de celles qui ſont à la ſeconde place, pour en compoſer une de celles qui ſont à la troiſiéme place, il eſt clair que toutes les fois qu'on avancera un chiffre d'une place, il deviendra décuple de ce qu'il étoit; parce que chacune de ſes unités en vaudra dix de celles dont ce chiffre étoit compoſé avant d'avoir changé de place. Et réciproquement ſi l'on recule un chiffre d'une place, il ne vaudra plus que la

dixiéme partie de ce qu'il valoit avant d'avoir changé de place. Cela eſt trop évident pour mériter une plus ample explication.

Puiſqu'un chiffre devient décuple de ce qu'il valoit, toutes les fois qu'on l'avance d'une place ; il deviendra dix fois décuple ou centuple en l'avançant de deux places ; il deviendra dix fois centuple ou mille fois plus grand en l'avançant de trois places ; &c. Et réciproquement un chiffre reculé de deux places, ne vaudra plus que la dixiéme partie de la dixiéme partie, ou la centiéme partie de ce qu'il valoit, & en le reculant de trois places, il ne vaudra plus que la dixiéme partie de la centiéme partie, ou la milliéme partie de ce qu'il valoit auparavant.

CHAPITRE III.

Des Parties Décimales.

3 NOus avons vû dans le Chapitre précédent, comment les unités deviennent continuellement décuples les unes des autres, à meſure qu'on avance leur chiffre d'un rang vers la gauche ; & nous avons ſuffiſamment expliqué comment par les différentes combinaiſons & répétitions des mêmes chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, l'on peut exprimer tous les nombres poſſibles compoſés d'unités ſimples de quelque eſpece qu'elles puiſſent être. Nous allons maintenant expliquer comment on peut, par le moyen des mêmes caracteres, exprimer tous les nombres dont les unités ne ſont que des dixiémes ou des centiémes ou des milliémes parties, &c. de l'unité ſimple que l'on regarde comme l'unité principale.

Puiſque ſuivant les principes établis dans le Chapitre précédent, dix unités d'un certain degré compoſent une unité du degré ſupérieur, & du rang immédiatement à gauche; il eſt évident que ſi l'on partage une unité d'un degré quelconque en dix parties égales, ces parties ſeront dix unités du degré inférieur, & du rang immédiatement à droite. Par exemple, ſi l'on partage une *centaine* qui eſt une unité du troiſiéme degré & du troiſiéme rang en dix parties égales, l'on aura des *dixaines* ou des unités du ſecond degré, qui ne doivent avoir que la ſeconde place: ſi l'on partage encore une de ces nouvelles unités en dix parties égales, l'on aura des *unités ſimples*, ou du premier degré qui doivent occuper la premiere place. Ainſi en diviſant continuellement les unités en dix parties égales, l'on trouve toujours de nouvelles unités ſous-décuples ou dix fois plus petites, dont les chiffres qui repréſentent leurs nombres doivent occuper des places reculées de plus en plus vers la droite, juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé aux unités ſimples qui occupent la premiere place; mais rien n'empêche qu'on ne puiſſe pouſſer plus loin la même diviſion.

Les chiffres placés dans des rangs continuellement reculés vers la droite, ayant des unités continuellement ſous-décuples de celles des chiffres précédens; ſi l'on place une virgule à la droite du chiffre des unités ſimples ou principales, pour faire reconnoître la place de ces unités, & que l'on écrive tant de chiffres qu'on voudra à la droite de cette virgule, comme on le voit dans ce nombre (576, 347892) on diſtinguera facilement que le nombre repréſenté par les chiffres 576 qui ſeront à la gauche de la virgule, nombrera des unités ſimples ou principales, & que les autres chiffres 347892 qui ſeront à la droite de

la virgule, nombreront des unités qui ſeront d'autant plus ſous-décuples de l'unité ſimple, qu'ils ſeront plus reculés ſur la droite de la même virgule.

Car ſuivant les principes de la numération, le chiffre 3 qui ſera immédiatement à la droite de la virgule ou du chiffre 6 des unités ſimples, aura des unités ſous-décuples ou dix fois plus petites que celles du chiffre 6 qui ſont des unités ſimples; ainſi les unités de ce chiffre 3 ſeront des dixiémes parties de l'unité ſimple, & ſeront par conſéquent nommées des *dixiémes*. Il en ſera de même du chiffre 4 qui ſera à la droite du chiffre 3: ſes unités ſeront des dixiémes parties de celles du chiffre 3, & ſeront par conſéquent des dixiémes parties de dixiéme ou des centiémes de l'unité ſimple, & ſeront à cauſe de cela nommées des *centiémes*. Enfin les unités des chiffres ſuivans 7 8 9 2 qui ſeront à droite, devenant continuellement ſous-décuples, ſeront des milliémes, des dix-milliémes, des cent-milliémes, des millioniémes parties, &c. de l'unité principale, & ſeront pour cette raiſon nommées *milliémes*, *dix-milliémes*, *cent-milliémes*, *millioniémes*, &c. comme dans l'exemple ſuivant.

5	centaines
2	dixaines
6	unités ſimples
3	dixiémes
4	centiémes
7	milliémes
8	dix-milliémes
9	cent-milliémes
2	millioniémes

Tous les chiffres qui ſeront placés à la droite du chiffre des unités ſimples, dont la place eſt marquée

par une virgule, ſeront nommés *chiffres décimaux*, & leurs unités ſeront appellées *parties décimales* ou *fractions décimales.*

Avant d'expliquer comment il faut énoncer un nombre qui contient des parties décimales; il faut remarquer que dans les chiffres décimaux, de même que dans les autres, dix unités d'un degré quelconque compoſent une unité du degré ſupérieur & du rang immédiatement à gauche. Par exemple, dix *millioniémes* compoſent un *cent-milliéme*, dix *cent-milliémes* valent un *dix-milliéme*.... dix *dixiémes* font une *unité ſimple*; enſorte que les chiffres décimaux ont la même propriété que les autres chiffres dont nous avons expliqué la numération. Cela poſé, on concevra aiſément comment on peut s'énoncer dans la numération des nombres dont l'expreſſion contient des chiffres décimaux. Nous prendrons pour exemple le même nombre (576, 347892.)

1°. On peut conſidérer (576, 347892) comme un nombre compoſé de deux parties, dont la premiere repréſentée par les chiffres 576 qui ſont à la gauche de la virgule, ne compte que des unités ſimples ou principales, & dont la ſeconde repréſentée par les chiffres 347892 qui ſont à la droite de la virgule, a pour unités des millioniémes, de même que ſon chiffre 2 le plus reculé vers la droite de la virgule; en un mot on peut regarder (576, 347892) comme ſi ce nombre étoit écrit de cette maniere, 576 *unités ſimples* & 347892 *millioniémes.*

La premiere partie du nombre (576, 347892) pouvant évidemment s'écrire ainſi, 576 *unités*, il eſt clair que, ſuivant les principes établis dans le Chapitre précédent, on peut l'énoncer de cette maniere, *cinq cents ſoixante & ſeize* unités ſimples, ou de l'eſpece principale que l'on veut nombrer.

A l'égard de la ſeconde partie du même nombre (576, 347892) laquelle ne contient que des chiffres décimaux, ſi l'on démontre qu'on peut l'écrire ainſi, 347892 *millioniémes*, il eſt évident que ſuivant les mêmes principes établis, l'on pourra l'énoncer de cette maniere, *trois cents quarante-ſept mille huit cents quatre-vingt-douze* millioniémes. Ainſi nous devons nous attacher à prouver que la ſeconde partie du nombre (576, 347892) donné pour exemple, peut être écrite ainſi, 347892 *millioniémes.*

Le chiffre le plus à droite du nombre (576, 347892) eſt compoſé de deux unités, qui relativement à la place de ce chiffre ont été nommées *millioniémes.*

Suivant ce que nous avons dit des chiffres décimaux dont les unités deviennent continuellement ſous-décuples ou dix fois moindres à meſure que leur chiffre eſt reculé vers la droite, dix des unités nommées *millioniémes* valent une unité du chiffre ſuivant (9) qui eſt immédiatement à gauche; ainſi ce 9 vaut nonante ou quatre-vingt-dix *millioniémes.*

Par la même raiſon dix unités ſemblables à celles du 9, c'eſt-à-dire, dix dixaines de *millioniémes* compoſeront une unité du chiffre 8 qui ſuit à gauche: les unités du chiffre 8 ſeront donc des dixaines de dixaines, ou des centaines de *millioniémes*; & ainſi des autres chiffres décimaux qui compoſent la ſeconde partie du nombre propoſé.

On pourra donc conſidérer les *millioniémes* comme des unités ſimples ou principales qui compoſent la ſeconde partie du nombre propoſé; & cette ſeconde partie pourra être regardée comme un nombre ordinaire appliqué à nombrer des *millioniémes.* Ainſi la ſeconde partie du nombre propoſé (576, 347892) peut être écrite de cette maniere, 347892 *millioniémes.* Donc enfin le nombre total repréſenté par

(576, 347892) peut être énoncé de cette maniere, *cinq cents ſoixante & ſeize* unités, & *trois cents quarante-ſept mille huit cents quatre-vingt-douze* millioniémes.

2°. En conſidérant encore que les unités des chiffres du nombre propoſé (576, 347892) ſont continuellement décuples les unes des autres, en allant de la droite à la gauche, & que les unités de la plus baſſe eſpece ſont des *millioniémes;* on ſentira aiſément que le nombre entier propoſé peut être regardé comme un nombre ordinaire de la nature de ceux dont nous avons parlé dans le Chapitre précédent, mais dont les unités propres ou principales ſont des *millioniémes.* En ſe repréſentant ainſi le nombre propoſé, on pourra l'énoncer de cette maniere, *cinq cents ſoixante & ſeize millions trois cents quarante-ſept mille huit cents quatre-vingt-douze* millioniémes.

Il eſt aiſé de voir maintenant qu'un nombre quelconque qui contient des chiffres décimaux, n'eſt différent d'un autre nombre qui n'en contient point, qu'en ce qu'ils ont des unités différentes. Le nombre qui ne contient point de chiffres décimaux a pour unité principale l'unité abſolue entiere *une fois*, ou l'unité entiere de l'eſpece que l'on veut nombrer. Le nombre qui contient des chiffres décimaux n'a pour unités principales que des parties de l'unité abſolue *une fois*, ou de l'unité de l'eſpece que l'on veut nombrer; & c'eſt la place de la virgule qui décide quelles ſont les parties de l'unité entiere qui ſervent d'unités principales à ce nombre. Par exemple, ſi la virgule a un ou deux ou trois..... ou ſix chiffres décimaux après elle, les unités principales ſeront des dixiémes, ou des centiémes, ou des milliémes..... ou des millioniémes de l'unité entiere.

Cette ſeconde maniere de conſidérer les nombres qui contiennent des chiffres décimaux eſt ſouvent la

plus commode, & nous aurons occaſion de nous en ſervir dans la ſuite.

3°. Enfin lorſque les nombres contiennent des chiffres décimaux, l'on peut commencer l'énoncé de la numération par celle de la partie qui eſt à la gauche de la virgule, ſuivant les principes ci-devant expliqués, & énoncer enſuite les valeurs de tous les chiffres décimaux les unes après les autres, avec les noms particuliers de leurs unités. Par exemple, pour énoncer le nombre (576, 347892) l'on peut dire : cinq cents ſoixante & ſeize *unités entiéres*, & trois *dixiémes*, quatre *centiémes*, ſept *milliémes*, huit *dix-milliémes*, neuf *cent-milliémes*, & deux *millioniémes*. Mais il faut avouer que cet énoncé, quoiqu'auſſi bon & preſque auſſi court que les autres, n'eſt guère en uſage ; il faut cependant le connoître, quand ce ne ſeroit que pour ſavoir qu'il ſignifie la même choſe que les autres : on a même beſoin de conſidérer ainſi les chiffres décimaux dans pluſieurs occaſions.

Soit que l'on conſidere les chiffres qui ſont à la gauche de la virgule, ſoit que l'on conſidere ceux qui ſont à ſa droite, la place occupée par le chiffre des unités, & qui eſt marquée par une virgule, ſera toûjours nommée *la premiere place*. Les places des chiffres qui ſeront ſur la gauche de la virgule ſeront nommées *ſeconde*, *troiſiéme*, *quatriéme place* en montant ; au lieu que les places des chiffres qui ſeront à la droite de la même virgule ſeront nommées *ſeconde*, *troiſiéme* & *quatriéme place* en deſcendant : ainſi les *dixaines* auront la *ſeconde place* en montant, & les *dixiémes* auront la *ſeconde place* en deſcendant.

Un nombre n'a ſouvent ni unités principales, ni unités collectives, mais ſeulement des chiffres décimaux ; & comme on ne peut diſtinguer la nature des chiffres décimaux que par les places qu'ils occupent,

il faut marquer la place des unités ſimples ou principales par un zéro ſuivi d'une virgule, afin de faire connoître qu'il n'y a point d'unités ſimples, & que tous les chiffres qui ſont à la droite, ſont des chiffres décimaux. Par exemple, (0, 874563) ſignifie & repréſente 874563 *millioniémes.*

Il arrive encore ſouvent qu'un nombre manque, non ſeulement d'unités ſimples ou principales, mais qu'il manque encore de *dixiémes*, de *centiémes*, de *milliémes*, &c. & qu'il a des chiffres décimaux d'eſpeces inférieures. Dans ce cas, pour donner à chaque chiffre décimal la place qui lui convient, il faut non ſeulement remplir la place des unités ſimples par un zéro ſuivi d'une virgule, mais il faut encore remplir par des zéros les places des chiffres décimaux qui manquent; enſorte qu'un nombre qui n'auroit ni unités ſimples, ni dixiémes, ni centiémes, ni milliémes, auroit quatre zéros à ſa gauche. Par exemple, (0, 000289) repréſentera 289 *millioniémes.*

Comme la virgule placée à la droite d'un chiffre ſignifie que ce chiffre eſt à la premiere place, & le détermine par conſéquent à compter des unités ſimples; on pourra toûjours placer à la droite de la virgule autant de zéros qu'on voudra, ſans qu'il en arrive aucun changement au nombre à la droite duquel on aura mis ces zéros. Par exemple, le nombre 389 ne ſera pas changé, en l'écrivant ainſi (389,000) & ſignifiera toûjours *trois cents huitante-neuf* unités ſimples, parce que les zéros placés après la virgule marqueront qu'il n'y a ni dixiémes, ni centiémes, ni milliémes, ni aucune eſpece de nombre décimal.

Quelquefois l'on met des zéros à la droite de la virgule d'un nombre, pour changer la dénomination de l'unité principale, ou pour la réduire en unités plus petites. Par exemple, ſi l'on veut réduire les

unités du nombre 389 en *centiémes*, on l'écrira ainſi, (389, 00) & il ſignifiera 38900 *centiémes*. Si on vouloit réduire les unités en *dix-milliémes*, on l'écriroit de cette maniere (389, 0000) & il ſignifieroit 3890000 *dix-milliémes* : & ainſi des autres changemens.

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

LIVRE SECOND.

Des Opérations de l'Arithmétique ſur les Nombres incomplexes.

LES Opérations de l'Arithmétique ſe réduiſent à ces quatre problêmes ; *ajoûter*, *ſouſtraire*, *multiplier*, *diviſer*. Toutes les autres opérations plus compoſées ne ſont que des combinaiſons de celles-ci.

Les quatre Opérations de l'Arithmétique ſe font ſur des nombres *incomplexes*, ou ſur des nombres *complexes*.

4 Les *nombres incomplexes* ſont ceux qui n'ont qu'une unité principale, comme la livre tournois, la toiſe &c toute autre unité qui ſeroit ou arbitraire ou établie par l'uſage.

Les *nombres complexes* ſont ceux qui ont pluſieurs unités principales différentes, & qui devroient plutôt être appellés *ſommes* que *nombres*, parce qu'un nombre eſt la collection de pluſieurs unités égales.

Par exemple, la ſomme compoſée de 8 livres, de 8 ſols & de 8 deniers, eſt un nombre complexe ; celle de 50 toiſes & de 5 pieds, eſt pareillement un nombre complexe, parce que ces deux ſommes ſont compoſées de nombres qui ont différentes unités principales.

Nous ne parlerons dans ce Livre que de l'Addition, de la Souſtraction, de la Multiplication & de la Diviſion des nombres incomplexes, & nous réſerverons pour le Livre quatriéme les mêmes opérations ſur les nombres complexes.

CHAPITRE PREMIER.

De l'Addition des Nombres incomplexes.

DÉFINITIONS.

1 L'ADDITION eſt une opération par laquelle on trouve un nombre égal à la ſomme de pluſieurs autres nombres.

Comme toutes les unités d'un même nombre doivent être de la même eſpece, il faut que tous les nombres que l'on propoſera d'ajoûter enſemble pour ne faire qu'un même nombre, ayent des unités de la même eſpece, ou qui puiſſent être réduites à la même eſpece. Par exemple, ſi l'on propoſoit d'ajoûter enſemble 20 livres tournois, 50 chevaux & 60 toiſes, qui ſont trois nombres dont les unités principales ne ſont pas de la même eſpece, & ne ſont pas même réductibles à la même eſpece d'unité, on ne s'aviſeroit pas de chercher un nombre égal à la ſomme de ces trois nombres ; & pour les ajoûter enſemble, on ſe contenteroit d'en faire un mémoire qui repréſenteroit leur ſomme. Si l'on propoſoit d'ajoûter enſemble

2 toiſes, 5 pieds & 8 pouces, on ne s'aviſeroit pas non plus d'ajoûter ſimplement enſemble les trois nombres 2, 5 & 8, leurs unités étant différentes. Cependant comme ces unités différentes ſont réductibles à la même eſpece, puiſque deux toiſes valent 144 pouces, que 5 pieds valent 60 pouces, & qu'on peut faire un ſeul nombre des trois nombres 144 pouces, 60 pouces & 8 pouces, l'on pourra ajoûter enſemble 2 toiſes 5 pieds 8 pouces, & n'en faire qu'un ſeul nombre en réduiſant toutes les unités à la même eſpece ; mais comme ce n'eſt point ici le lieu de parler des nombres dont les unités ont différentes dénominations, il faut revenir aux nombres incomplexes dont les unités ſont de la même eſpece.

Le nombre qui réſulte de l'aſſemblage ou de l'addition de pluſieurs autres, ſe nomme *Somme*.

PROBLÉME.

6 *Ajoûter enſemble pluſieurs nombres repréſentés par tant de chiffres que l'on voudra.*

Pour faire cette opération commodément, l'on écrira les uns ſous les autres les nombres que l'on doit ajoûter enſemble, de maniere que les chiffres du même degré ſoient exactement dans une même colonne verticale ; & l'on tirera une ligne au-deſſous de tous ces nombres, pour les ſéparer de celui qui en doit être la ſomme.

Enſuite on ajoûtera enſemble tous les chiffres du plus bas degré qui ſont dans la premiere colonne à droite. Si la ſomme de ces chiffres eſt moindre que 10, & qu'elle puiſſe par conſéquent être repréſentée par un ſeul chiffre, on écrira ce chiffre dans cette premiere colonne au-deſſous de la barre ; mais ſi cette ſomme ſurpaſſe 9, & ne peut être repréſentée que par pluſieurs chiffres, on écrira au-deſſous de la barre le chiffre des

unités de cette ſomme, & l'autre chiffre étant de l'eſpece de ceux de la ſeconde colonne, ſera retenu pour être ajoûté avec eux.

On fera la même opération pour toutes les colonnes juſqu'à la derniere qui contient les chiffres du plus haut degré ; & lorſqu'on aura ajoûté enſemble les chiffres de cette derniere colonne, avec celui ou ceux qu'on aura retenu de la colonne précédente, on écrira dans cette colonne au-deſſous de la barre le nombre que l'on aura trouvé.

Cette opération étant faite, tous les chiffres qui ſe trouveront au-deſſous de la barre, repréſenteront la ſomme de tous les nombres que l'on a propoſé d'ajoûter enſemble.

Comme des Exemples frappent davantage que des préceptes généraux, nous allons détailler l'opération de l'addition dans les exemples ſuivans.

EXEMPLE PREMIER.

On propoſe d'ajoûter enſemble les deux nombres 3456 *&* 4231.

	4e. colonne	3e. colonne	2e. colonne	1ere. colonne
Ces deux nombres étant ainſi diſpoſés	3	4	5	6
	4	2	3	1
On trouvera pour leur ſomme	7	6	8	7

Pour déterminer les uns après les autres les chiffres de cette ſomme, on opérera comme il ſuit.

1°. On ajoûtera enſemble les deux chiffres 6 & 1 qui compoſent la premiere colonne ; & comme leur ſomme eſt *ſept* que l'on peut écrire par le ſeul chiffre 7

on écrira 7 au-deſſous de la barre dans cette premiere colonne.

2°. On ajoûtera enſuite les chiffres 5 & 3 du ſecond degré qui compoſent la ſeconde colonne ; & comme leur ſomme eſt *huit* que l'on peut repréſenter par le ſeul chiffre 8, on écrira 8 au-deſſous de la barre dans cette ſeconde colonne.

3°. On ajoûtera de même enſemble les chiffres 4 & 2 de la troiſiéme colonne ; & leur ſomme pouvant être repréſentée par le ſeul chiffre 6, on écrira 6 au-deſſous de la barre dans cette troiſiéme colonne.

4°. Enfin l'on ajoûtera enſemble les chiffres 3 & 4 de la quatriéme & derniere colonne ; & leur ſomme étant repréſentée par le ſeul chiffre 7, l'on écrira 7 au-deſſous de la barre dans cette derniere colonne.

L'opération étant conduite comme on vient de l'expliquer, l'on trouve au-deſſous de la barre les quatre chiffres 7687, qui repréſentent le nombre ſept mille ſix cents huitante-ſept, auquel montent les deux nombres 3456 & 4231 que l'on a propoſé d'ajoûter enſemble.

Exemple II.

On propoſe d'ajoûter enſemble les quatre nombres 5874, 9956, 459, 15.

Les chiffres du même degré étant mis les uns ſous les autres comme ici

5874
9956
459
15

On trouvera que la ſomme eſt 16304

Pour déterminer ſuivant la regle les chiffres de cette ſomme les uns après les autres, on opérera comme il ſuit.

1°. On ajoûtera enſemble les nombres repréſentés par les chiffres qui compoſent la premiere colonne, en diſant: 4 & 6 font 10, & 9 font 19, & 5 font 24. Comme cette ſomme 24 ne peut être repréſentée que par deux chiffres, ſavoir par 4 qui repréſente 4 unités, & par 2 qui repréſente 2 dixaines, on écrira 4 dans la premiere colonne au-deſſous de la barre, & l'on retiendra le 2 ou plutôt les deux dixaines pour les ajoûter avec les quatre nombres de dixaines qui compoſent la ſeconde colonne.

2°. Paſſant à l'addition des nombres de la deuxiéme colonne, dont les chiffres ſont compoſés d'unités du ſecond degré, l'on dira: 2 que l'on a retenu de la premiere colonne & 7 font 9, & 5 font 14, & 5 font 19, & 1 font 20. Comme cette ſomme 20 d'unités du ſecond degré ne peut être écrite que par deux chiffres, dont celui 2 ſignifie qu'il y a deux dixaines d'unités du ſecond degré qui ne font que deux unités de la troiſiéme colonne ou du troiſiéme degré, & dont celui 0 marque qu'il n'y a point d'unités du degré de celles qu'on a ajoûtées, l'on écrira 0 au-deſſous de la ſeconde colonne, & l'on retiendra le 2 pour l'ajoûter avec les chiffres de la troiſiéme colonne.

3°. Pour la troiſiéme colonne dont les chiffres repréſentent des nombres compoſés d'unités du troiſiéme degré, l'on dira: 2 que l'on a retenu de la ſeconde colonne & 8 font 10, & 9 font 19, & 4 font 23. Comme ce nombre 23 s'écrit par deux chiffres, ſavoir par un 3 qui ſignifie trois unités de la colonne que l'on vient d'ajoûter, & par un 2 qui repréſente deux dixaines d'unités de la même colonne, ou deux unités d'un degré ſupérieur ou ſemblables à celles de la quatriéme colonne, on écrira 3 ſous la barre dans la troiſiéme colonne, & l'on retiendra 2 pour l'ajoûter avec la quatriéme colonne qui ſuit.

4°. Enfin

4°. Enfin pour l'addition de la quatriéme colonne avec ce qu'on a retenu, l'on dira : 2 que l'on a retenu & 5 font 7, & 9 font 16. Cette ſomme étant compoſée de 6 unités ſemblables à celles de la quatriéme colonne & d'une unité d'un degré ſupérieur, on écrira 6 ſous la barre dans la quatriéme colonne. A l'égard de l'unité d'un degré ſupérieur, on la retiendroit, ſi l'on avoit encore une colonne à ajoûter ; mais comme on n'en a point, on avancera le 1 à la gauche du 6, c'eſt-à-dire que l'on écrira 16 tout ſimplement.

Exemple III.

7 *On propoſe d'ajoûter enſemble les quatre nombres* (5874 ; 4631, 752 ; 6872, 44 ; 9797, 5) *dont les trois derniers contiennent des chiffres décimaux.*

On écrira tous ces nombres les uns ſous les autres, de maniere que les chiffres des unités ſimples ſoient dans une même colonne, & que tous les autres chiffres de même dénomination ſe trouvent pareillement dans une même colonne les uns ſous les autres. Les chiffres étant ainſi diſpoſés,

5874
4631, 752
6872, 44
9797, 5

27175, 692

1°. On ajoûtera enſemble les chiffres du plus bas degré qui ſont des *milliémes* ; & comme il n'y a que 2 *milliémes*, on écrira 2 au-deſſous de la barre dans la colonne des *milliémes*.

2°. On ajoûtera les chiffres 5 & 4 de la colonne ſuivante qui eſt celle des *centiémes* ; & comme leur ſomme 9 s'écrit par un ſeul chiffre, on écrira ce chiffre 9 dans cette colonne au-deſſous de la barre.

3°. On ajoûtera enſemble les chiffres de la colonne des *dixiémes*, en diſant : 7 & 4 font 11, & 5 font 16 ; & comme cette ſomme 16 eſt compoſée de 6 unités du degré de cette colonne, & d'une dixaine qui vaut une unité de la colonne ſuivante ; l'on écrira 6 ſous cette colonne, & l'on retiendra 1 pour l'ajoûter avec la colonne ſuivante.

4°. Ajoûtant l'unité qu'on vient de retenir avec les chiffres de la colonne des unités *ſimples* ou *principales*, on trouvera 15, c'eſt-à-dire, 5 unités de cette colonne, & 1 *dixaine* qui vaut une unité de la colonne ſuivante ; ainſi l'on écrira 5 au-deſſous de cette colonne, & l'on retiendra 1 pour la colonne ſuivante.

5°. Ajoûtant de même l'unité qu'on vient de retenir avec la colonne des dixaines, on trouvera 27, c'eſt-à-dire, 7 unités de cette colonne, & 2 dixaines qui valent deux unités de la colonne ſuivante ; ainſi l'on écrira 7 ſous cette colonne, & l'on retiendra 2 pour la colonne ſuivante.

On fera la même opération pour les autres colonnes, & l'on trouvera (27175, 692) pour la ſomme des quatre nombres propoſés.

REMARQUE.

8 Les nombres (5874 ; 4631, 752 ; 6872, 44 ; 9797, 5) que l'on a propoſés dans le dernier exemple pour en faire l'addition, auroient pû être changés & réduits à avoir des unités principales de même dénomination ; & comme l'un de ces nombres (4631,752) repréſente 4631 unités ſimples & 752 *milliémes*, ou 4631752 *milliémes*, on auroit pû réduire les autres à avoir des *milliémes* pour unités principales : alors le nombre 5874 qui repréſente 5874 *unités ſimples*, ſeroit devenu 5874000 *milliémes*, celui (6872, 44)

ſeroit devenu 6872440 *milliémes*, & celui (9797, 5) ſeroit devenu 9797500 *milliémes*. Tous les nombres propoſés étant ainſi réduits à avoir des unités de même dénomination, leur addition auroit pû être faite ſuivant les préceptes que l'on a donnés pour ajoûter les nombres qui n'ont point de chiffres décimaux; & le total auroit été 27175692 *milliémes*; enſuite pour ſupprimer le mot de *milliémes*, on auroit pû écrire la même ſomme ſous cette forme 27175, 692). (*N°.* 3.)

DÉMONSTRATION.

Des Opérations que l'on a faites pour l'Addition.

Par ces opérations l'on a ajoûté enſemble toutes les parties des nombres qui étoient propoſés; & par conſéquent les réſultats que l'on a trouvés ſont les ſommes de ces nombres.

CHAPITRE II.

De la Souſtraction des Nombres incomplexes.

DÉFINITION.

9 L'OPÉRATION par laquelle on retranche une quantité d'une autre, s'appelle *Souſtraction*.

Il faut donc que la quantité qui doit être retranchée ſoit contenue dans celle dont on propoſera de la retrancher; & par conſéquent ces deux quantités doivent être de même eſpece, ou réductibles à la même eſpece.

PROBLÉME.

10 *Souſtraire un nombre d'un autre nombre.*

Pour faire une ſouſtraction, l'on écrit le nombre qu'on veut retrancher au-deſſous de celui dont on veut le retrancher, & l'on diſpoſe les chiffres de ces deux

nombres de maniere que les unités ſoient ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, les centaines ſous les centaines, &c; & s'il y a des chiffres décimaux, ceux qui ſont de même eſpece doivent auſſi être les uns ſous les autres. Les deux nombres étant ainſi diſpoſés, l'on tire une barre au-deſſous de laquelle doit être écrit le reſte de la ſouſtraction.

Pour faire la ſouſtraction par parties, on retranche chaque chiffre inférieur de ſon correſpondant ſupérieur, en commençant par la droite, & en allant toujours des chiffres du plus bas degré vers ceux qui ſont de degrés plus élevés. Mais dans cette opération, il peut arriver trois cas; ou le chiffre inférieur eſt plus petit que le chiffre ſupérieur qui lui répond, ou il lui eſt égal, ou il eſt plus grand.

Si le chiffre inférieur eſt plus petit que le ſupérieur, il en pourra être retranché ſans difficulté, & l'on aura un reſte que l'on écrira au-deſſous.

Si le chiffre inférieur eſt égal au ſupérieur, il pourra encore en être retranché; & comme il ne reſtera rien, on mettra un zéro au-deſſous pour le reſte.

Enfin, ſi le chiffre inférieur eſt plus grand que le ſupérieur, il n'en pourra point être retranché ſans une préparation qui conſiſte à emprunter une unité ſur le chiffre d'un degré ſupérieur, pour l'ajoûter avec le chiffre trop petit: alors le chiffre ſur lequel on a emprunté une unité, devient plus petit qu'il n'étoit d'une unité, & cette unité étant portée dans un rang inférieut d'un degré, y doit être comptée pour une dixaine; enſorte que le chiffre trop petit auquel on l'ajoûte, eſt toûjours augmenté de dix, & devient par conſéquent toûjours aſſez grand pour qu'on en puiſſe retrancher le chiffre inférieur qui ne ſauroit paſſer 9. Des exemples feront beaucoup mieux entendre cette opération.

Exemple premier.

Si du nombre	466
On retranche	324
Le reſte ſera	142

Le nombre que l'on veut retrancher étant écrit au-deſſous de celui dont il faut le retrancher, de maniere que les chiffres de même dénomination ſoient les uns ſous les autres, & la barre étant tirée comme on le voit dans cet exemple, on déterminera les chiffres du reſte les uns après les autres, en opérant comme il ſuit.

1°. Commençant par retrancher le chiffre du plus bas degré qui eſt le plus à droite, du chiffre qui eſt au-deſſus de lui, l'on dira : ſi de 6 l'on ôte 4, il reſtera 2 que l'on écrira au-deſſous de la barre dans le premier rang, où ſont les chiffres ſur leſquels on opere.

2°. Paſſant au rang ſuivant, l'on dira : ſi de 6 l'on ôte 2, il reſtera 4 que l'on écrira dans le ſecond rang où l'on opere.

3°. Enfin étant parvenu au dernier rang où ſont les chiffres de la plus haute dénomination, l'on dira : ſi de 4 on ôte 3, il reſtera 1 que l'on écrira au-deſſous de la barre dans le troiſiéme rang ; & l'opération ſera faite.

Le reſte de la ſouſtraction ſera donc 142.

Exemple II.

Si du nombre	552
On retranche	51
Il reſtera	501

Les chiffres étant diſpoſés comme on le voit, & de la maniere dont on vient de l'expliquer,

1°. Commençant par les chiffres du plus bas degré, l'on dira : ſi de 2 l'on ôte 1, il reſtera 1 que l'on écrira au-deſſous.

2°. Paſſant au rang ſuivant, l'on dira : ſi de 5 l'on ôte 5, il ne reſtera rien ; ainſi l'on écrira un zéro qui marquera que les chiffres des dixaines étant ſouſtraits l'un de l'autre, ne donnent point de reſte.

3°. Enfin paſſant au troiſiéme rang où il n'y a point de chiffre à retrancher, l'on dira : ſi de 5 on n'ôte rien, il reſtera 5 ; ainſi l'on écrira 5 pour le reſte au-deſſous de la barre dans ce troiſiéme rang.

L'opération étant achevée, l'on aura 501 pour le reſte que l'on demande.

Exemple III.

Si du nombre	758
L'on propoſe de retrancher	599
L'on trouvera pour le reſte	159

Les chiffres de même dénomination étant diſpoſés les uns au-deſſous des autres, on opérera comme il ſuit.

1°. Commençant par les chiffres du plus bas ordre, l'on propoſera de retrancher 9 de 8. Comme cela ne ſe peut pas ; l'on prendra ſur le chiffre ſuivant (5) du nombre ſupérieur une unité, pour en joindre la valeur avec le 8 qui eſt trop petit ; & comme cette unité tranſportée dans le rang du 8 y vaudra 10, elle augmentera 8 de 10, & l'on aura 18 dont on pourra retrancher 9. Le reſte ſera 9 que l'on écrira au-deſſous de la barre dans le premier rang.

2°. Paſſant au rang ſuivant où le 5 ne vaut plus que 4, à cauſe de l'unité qu'on a priſe ſur lui, & qu'on aura pû marquer par un point pour s'en ſouvenir ;

l'on propoſera d'ôter 9 de 4. Comme cela ne ſe peut pas, l'on prendra une unité ſur le chiffre ſuivant (7) du nombre ſupérieur, pour en joindre la valeur avec le 4 dont on doit ôter 9; & comme cette unité du troiſiéme degré portée dans le rang inférieur y vaudra 10; en la joignant avec 4 reſtant de 5, l'on aura 14 dont on pourra retrancher 9, & il reſtera 5 que l'on écrira au-deſſous.

3°. Paſſant au rang des centaines où le 7 ne vaut plus que 6, à cauſe de l'unité qu'on a priſe ſur lui, & que l'on a pû marquer par un point; on propoſera d'ôter 5 de 6, & il reſtera 1 que l'on écrira au-deſſous. Ainſi le reſte demandé ſera 159.

II *Il arrive ſouvent que le chiffre ſur lequel il faut emprunter une unité eſt un zéro, lequel ne repréſentant rien, ne peut rien prêter. Dans ce cas, il faudra emprunter ſur le chiffre qui ſera à la gauche du zéro ou de tous les zéros, s'il y en a pluſieurs; & laiſſant 9 au-deſſus de chacun des zéros au-delà deſquels on aura emprunté, l'on ne réſervera qu'une dixaine pour la joindre au chiffre duquel on veut ſouſtraire. Pour mieux faire entendre cette opération, nous propoſerons l'exemple ſuivant.*

Exemple IV.

	9 9
Si du nombre	7004
L'on retranche le nombre	5486
Le reſtera ſera	1518

L'on propoſera d'ôter 6 de 4. Comme cela eſt impoſſible, & qu'on ne peut pas emprunter ſur le chiffre qui eſt immédiatement à gauche du 4, ni ſur le ſuivant, parce que ce ſont deux zéros; on empruntera une unité ſur le 7 qui eſt au-delà de ces zéros. Mais comme l'unité empruntée ſur le 7 vaut 100 dixaines, &

qu'on n'a beſoin que d'une dixaine pour joindre avec le 4 dont on doit retrancher 6, on laiſſera au-deſſus des zéros qui ſont à la troiſiéme & à la ſeconde place les deux chiffres 9 9 qui vaudront 99 dixaines : enſorte que des 100 dixaines empruntées ſur le chiffre 7, on ne prendra qu'une dixaine qui étant jointe avec 4 fera 14 dont on retranchera 6, & il reſtera 8 que l'on écrira au-deſſous pour le premier chiffre du reſte que l'on cherche.

Le nombre ſupérieur étant ainſi préparé, le 7 ſur lequel on a emprunté 1 ne vaudra plus que 6, & les deux zéros ſur leſquels on a laiſſé des 9, ne ſeront plus regardés comme des riens, mais comme des 9. Ainſi pour continuer la ſouſtraction, on retranchera 8 de 9, & il reſtera 1 qu'on écrira au-deſſous. Puis on retranchera 4 de 9, & il reſtera 5 qu'on écrira pareillement au-deſſous. Enfin on ôtera 5 de 6, & il reſtera 1 qu'on écrira de même au-deſſous.

L'opération étant entiérement faite, comme on vient de l'expliquer, l'on aura 1518 pour le reſte qu'on demande.

12 *Lorſqu'il y a des chiffres decimaux dans le nombre que l'on doit retrancher, ou dans celui duquel il faut retrancher, ou dans tous les deux ; on diſpoſe d'abord les chiffres de même degré les uns ſous les autres ; & la ſouſtraction ſe fait enſuite de la même maniere que la précédente, en retranchant chaque chiffre de l'un de chaque chiffre correſpondant de l'autre.*

Pour n'avoir point de difficulté dans cette opération, lorſque l'un des deux nombres n'aura pas autant de chiffres décimaux que l'autre ; l'on mettra à la droite de celui qui en aura le moins, autant de zéros qu'il en faudra pour qu'ils ayent tous les deux un nombre égal de chiffres décimaux ; ce qui ne changera rien à la valeur de ce nombre, puiſque la virgule conſervera à chaque chiffre le rang qu'il avoit avant l'addition des zéros.

Les deux nombres étant ainſi préparés, & leur plus baſſe unité étant de la même eſpece, on pourra la prendre pour l'unité principale, & regarder les deux nombres comme s'ils n'avoient point de chiffres décimaux. Pour mieux faire entendre cette regle, en voici un exemple.

Exemple V.

On propoſe le nombre	230009, 3
Pour en retrancher le nombre	8716, 257

Comme ces deux nombres n'ont pas la même quantité de chiffres décimaux, le ſecond en ayant deux plus que le premier; on mettra deux zéros à la droite du premier, & les deux nombres propoſés deviendront ceux-ci

230009, 300
8716, 257

dont les unités du plus bas degré ſeront des *milliémes*; enſorte qu'on pourra les regarder comme des nombres ſans chiffres décimaux, deſtinés à compter des unités qui ſont des *milliémes*. On pourroit même ne point employer de virgules, en écrivant après eux le nom de *milliéme* comme ci-deſſous; & faiſant la ſouſtraction comme dans les exemples précédens,

	230009300	*milliémes*
	8716257	*milliémes*
On auroit pour reſte	221293043	*milliémes*

Mais comme les virgules n'ont point d'autre effet que de déterminer le degré de chaque chiffre, & de fixer la dénomination des unités du plus bas degré, on aime mieux ſupprimer le mot de *milliéme*, & placer

une virgule après le troiſiéme chiffre de chaque nombre. Suivant cela, l'on aura

Nombre dont il faut ſouſtraire	230009, 300
Nombre à ſouſtraire	8716, 257
Reſte	221293, 043

DÉMONSTRATION.

De l'Opération de la Souſtraction.

Par les opérations que l'on a faites, toutes les parties du nombre que l'on devoit ſouſtraire, ont été retranchées des parties correſpondantes de l'autre nombre, & chaque reſte a été écrit; on a donc retranché le nombre propoſé, comme on le devoit; & les chiffres qui ſe trouvent écrits, compoſent un nombre égal au reſte que l'on demandoit.

REMARQUE.

13 Il y a encore pluſieurs méthodes différentes de celles que nous avons expliquées, pour faire la ſouſtraction; mais nous n'en propoſerons que deux: la premiere, parce qu'on en fait aſſez communément uſage; la ſeconde, parce qu'elle nous ſervira à faire la preuve de l'addition; nous n'en parlerons même que par rapport à cette preuve.

La premiere des deux méthodes que nous nous propoſons d'expliquer, ne differe de celle dont nous avons parlé, qu'en ce que l'on n'ôte point des chiffres ſupérieurs les unités qu'on a empruntées ſur eux, avant d'en ſouſtraire les chiffres qui ſont au-deſſous d'eux, & que l'unité qu'on a empruntée ſur un chiffre ſupérieur s'ajoûte avec le chiffre inférieur; enſorte qu'on ôte tout à la fois du chiffre ſupérieur l'unité

qu'on a empruntée ſur lui, & le chiffre inférieur qu'on en doit retrancher. Voici un exemple de cette opération.

Exemple.

Si du nombre	7004
On ſouſtrait le nombre	5486
Il reſtera	1518

Pour trouver tous les chiffres du reſte ſuivant la méthode dont nous venons de donner une idée,

1°. On propoſera d'ôter 6 de 4; & comme cela eſt impoſſible, on ajoûtera une dixaine à 4, ce qui fera 14; puis on ôtera 6 de 14, & il reſtera 8 qu'on écrira au-deſſous.

2°. La dixaine que l'on a ajoûtée avec 4 auroit dû être une unité empruntée ſur le zéro qui ſuit 4. Ainſi cette unité devant être ôtée de ce zéro, & le chiffre 8 qui eſt au-deſſous du même zéro, devant auſſi en être retranché, on ajoûtera l'unité empruntée avec le 8, & l'on propoſera de retrancher leur ſomme 9 du zéro: mais comme cela eſt impoſſible, on empruntera une unité d'un degré ſupérieur, qui étant apportée dans le rang du zéro vaudra 10; puis on retranchera 9 de 10, & il reſtera 1 qu'on écrira au-deſſous.

3°. L'unité qu'on a empruntée, devant être retranchée du ſecond zéro, auſſi bien que le 4 qui eſt au-deſſous de lui: on ajoûtera l'unité empruntée avec 4, puis on propoſera de retrancher leur ſomme 5 du zéro qui eſt au-deſſus; & comme cela eſt impoſſible, l'on empruntera une unité du rang ſupérieur, qui étant apportée dans le rang où eſt le zéro pour la joindre avec lui, vaudra 10; enſuite on retranchera 5 de 10, & il reſtera 5 qu'on écrira au-deſſous.

4°. Enfin l'unité empruntée devant être ôtée du 7, auſſi bien que le 5 qui eſt au-deſſous de lui, l'on ajoûtera cette unité avec 5, & ayant retranché leur ſomme 6 de 7, il reſtera 1 qu'on écrira au-deſſous.

L'opération étant faite comme on vient de l'expliquer, l'on trouve 1518 pour le reſte demandé.

Nous avons choiſi un exemple ſur lequel il auroit fallu emprunter au-delà de pluſieurs zéros en ſuivant la méthode qui a été premierement expliquée, pour faire voir que cette derniere méthode eſt générale, & qu'on opere toûjours de la même maniere dans tous les cas qui peuvent ſe préſenter.

DE LA PREUVE

DE L'ADDITION ET DE LA SOUSTRACTION.

ON n'entend point ici par preuve une démonſtration, mais ſeulement une opération qui puiſſe faire connoître ſi l'on a commis quelque erreur en opérant.

L'Addition & la Souſtraction peuvent ſe ſervir mutuellement de preuve, comme on va le faire voir.

Preuve de l'Addition.

14 La ſomme de l'Addition doit contenir exactement tous les nombres qu'on a ajoûtés enſemble; c'eſt pourquoi ſi de la ſomme de l'addition l'on retranche toutes les parties qu'on a ajoûtées, il ne doit rien reſter. Nous propoſerons donc pour preuve de l'addition, de retrancher de la ſomme toutes les parties des nombres ajoûtés; & ſi après cette ſouſtraction il ne reſte rien, l'addition ſera réputée bonne.

Voici l'ordre qu'on ſuit dans cette opération.

Suppoſons qu'on a ajoûté enſemble les trois nombres { 473 / 567 / 924

Et qu'on a trouvé que leur ſomme eſt 1964

110

Si cette ſomme 1964 eſt exacte & contient toutes les parties des nombres ajoûtés; il eſt évident que ſi l'on en retranche toutes les centaines, toutes les dixaines & toutes les unités des nombres ajoûtés, il ne reſtera rien.

On pourroit faire cette ſouſtraction en commençant par les unités, de même que nous l'avons faite dans tous les exemples qu'on vient de voir; mais comme il faudroit aſſembler les unités, les dixaines & les centaines dans le même ordre qu'on les a ajoûtées pour trouver leur ſomme, l'on courroit riſque de retomber dans les mêmes erreurs qu'on pourroit avoir commiſes en faiſant l'addition. Nous nous propoſerons donc de faire la ſouſtraction, en commençant par les chiffres dont les unités ſont du plus haut degré; ce qui fera une troiſiéme méthode de ſouſtraction.

1°. Pour retrancher les centaines des nombres ajoûtés, de la ſomme de ces nombres, nous ajoûterons ces centaines, en diſant: 4 & 5 font 9, & 9 font 18; & retranchant ces 18 centaines de 19 centaines de la ſomme, il reſtera 1 que nous écrirons au-deſſous de 9, après avoir barré les deux chiffres 19.

2°. Pour retrancher les dixaines, nous les ajoûterons, en diſant: 7 & 6 font 13, & 2 font 15; puis ayant retranché ces 15 dixaines des 16 dixaines qui reſtent dans la ſomme, & qui ſont compoſées du premier reſte 1 écrit au-deſſous du 9, & du chiffre *6 dixaines* de la ſomme, il reſtera 1 que nous écri-

rons au-deſſous de 6, après avoir barré les deux chiffres 16.

3°. Enfin nous ajoûterons les unités, en diſant : 3 & 7 font 10, & 4 font 14 ; & ayant retranché ces 14 unités de 14 unités qui ſont encore dans la ſomme, il ne reſtera rien : on écrira donc un zéro au-deſſous de 4, après avoir barré 14.

Comme il ne reſte rien de cette ſouſtraction, l'addition des trois nombres 473 ; 567 ; 924, ſera réputée bonne.

Preuve de la Souſtraction.

15 Pour prouver qu'une ſouſtraction a été bien faite, nous propoſerons d'ajoûter ſon reſte avec la quantité retranchée ; & ſi la ſomme eſt égale à la quantité dont on a retranché, la ſouſtraction ſera réputée bonne. En voici un exemple.

Lorſque d'un nombre tel que	7004
L'on a retranché un autre nombre tel que	5486
Si le reſte eſt exactement le nombre	1518
Ajoûtant 1518 *avec* 5486, *on aura cette ſomme*	7004

La ſomme étant la même que le nombre dont on a ſouſtrait, prouvera que la ſouſtraction a été bien faite.

Il eſt évident que la quantité retranchée étoit dans celle dont elle a été ſouſtraite, & que le reſte étoit auſſi dans cette même quantité ; enſorte que la quantité retranchée & le reſte ſont toutes les parties de la quantité dont on a ſouſtrait : il eſt donc clair que l'aſſemblage de la quantité ſouſtraite & du reſte, doit être égal à la quantité dont on a ſouſtrait.

CHAPITRE III.

De la Multiplication des Nombres incomplexes.

DÉFINITIONS.

16 LA Multiplication eſt une opération par laquelle on répete une quantité un certain nombre de fois.

Il faut donc deux nombres pour une multiplication ; premierement le nombre qui doit être multiplié ou répété, qu'on appelle *multiplicande* ; ſecondement celui qui indique par le nombre de ſes unités combien de fois il faut répéter le multiplicande, & que l'on nomme *multiplicateur*.

Le multiplicande & le multiplicateur ſe nomment auſſi *facteurs* de la multiplication ; & le nombre qui réſulte de la multiplication, ou qui contient le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient l'unité, ſe nomme *produit*.

Par exemple, ſi l'on propoſe de multiplier 8 par 4, ces deux nombres 8 & 4 ſeront les deux *facteurs* de la multiplication ; le premier (8) que l'on doit répéter ſera le *multiplicande* ; le ſecond (4) dont les quatre unités marquent qu'il faut répéter 4 fois le multiplicande, ſera le *multiplicateur* ; enfin le nombre 32 que l'on trouvera en répétant 8 quatre fois, ſera le *produit*.

17 Pour indiquer que deux nombres doivent être multipliés l'un par l'autre, l'on met entr'eux cette marque × qui ſignifie *multiplié par*. Ainſi 8 × 4 ſignifie que l'on multiplie 8 par 4 ; & comme le produit de cette multiplication eſt 32, l'on peut dire que 8 × 4 eſt égal à 32.

Si l'on vouloit encore multiplier ce produit 8×4 ou 32 par un nouveau multiplicateur 2 ; l'on écriroit $8 \times 4 \times 2$ ou 32×2, dont le produit eſt 64 ; c'eſt-à-dire que l'on écriroit les uns après les autres tous les facteurs dont la multiplication doit compoſer un produit, en les ſéparant par la marque $\times$. Nous verrons dans la ſuite qu'on peut prendre ces facteurs dans tel ordre qu'on voudra, pour les multiplier enſemble.

On pourroit encore faire la multiplication, par exemple, celle de 32 par 4, en la réduiſant à une addition dans laquelle on écriroit le multiplicande 32 quatre fois & dans l'ordre où l'on écrit les quantités que l'on veut ajoûter ; parce que la ſomme de cette addition contiendroit 32 quatre fois, & ſeroit par conſéquent le produit de 32 multiplié par 4.

Cette façon de faire la multiplication peut être miſe en uſage lorſque le multiplicateur n'a que très-peu d'unités ; mais elle ne ſeroit pas praticable ſi le multiplicateur étoit un nombre un peu grand. Ainſi il faudra avoir recours à des regles particulieres & ſimples, pour abréger les opérations.

COROLLAIRE PREMIER.

18 Donc le produit d'une multiplication aura des unités de même eſpece que celles du multiplicande ; car ce produit étant fait de l'addition répétée du multiplicande, il ne peut pas avoir d'autres unités que lui.

1°. Il ſuit de là que ſi les unités du plus bas ordre du multiplicande, ſont des unités ſimples, ou des dixaines, ou des centaines, &c. les unités du plus bas ordre du produit ſeront auſſi des unités ſimples, ou des dixaines, ou des centaines, &c. Ainſi le produit doit avoir à ſa droite autant de rangs qu'il y en a à la droite du multiplicande.

multiplicande. Par exemple, ſi l'on multiplie 8 ou 80 ou 800 par 4, ce que l'on fera en répétant quatre fois le chiffre ſignificatif 8 du multiplicande; le produit 32 aura à ſa droite autant de zéros ou de places qu'il y en a après le chiffre 8 multiplié, & ſera 32 ou 320, ou 3200.

2°. La conſéquence que l'on vient de tirer, ſuppoſe que les unités du multiplicateur ſont des unités ſimples; mais ſi les unités du multiplicateur étoient des unités collectives, comme des dixaines, ou des centaines, ou des mille, &c. chacune de ces unités collectives marqueroit qu'il faut répéter le multiplicande dix fois, ou cent fois, ou mille fois: enſorte que le produit ſeroit dix fois, ou cent fois, ou mille fois plus grand que ſi l'on avoit multiplié par un nombre d'unités ſimples; & par conſéquent ce produit auroit encore à ſa droite autant de places qu'il y en auroit à la droite du chiffre multiplicateur.

Par exemple, ſi l'on multiplie 8 par 4, ou par 40, ou par 400, ou par 4000, &c; ce que l'on fera en répétant 8 quatre fois; le produit 32 aura dans tous ces cas autant de zéros ou de places à ſa droite qu'il y en aura à la droite du chiffre 4 multipliant, & ſera par conſéquent 32, ou 320, ou 3200, ou 32000.

3°. Et joignant enſemble ces deux conſéquences, on conclurra que le produit de deux chiffres multipliés l'un par l'autre doit avoir à ſa droite autant de zéros ou de rangs, qu'il y en aura en tout à la droite du chiffre multiplié, & à la droite du chiffre multipliant.

Par exemple, ſi l'on multiplie 800 par 4, ou par 40, ou par 400, ou par 4000, &c; ce qu'on fera en répétant le chiffre ſignificatif 8 du multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le chiffre ſignificatif 4 du multiplicateur; le produit 32 aura premiérement à ſa droite les deux zéros qui ſont à la

droite de 8, & aura de plus à ſa droite tous les zéros qui ſeront à la doite du chffre 4 multipliant; & ſera par conſéquent 3200, ou 32000, ou 320000, ou 3200000, &c.

Corollaire II.

19 Un nombre, quelle que ſoit la nature de ſes unités, peut être répété autant de fois qu'on le voudra; ainſi le multiplicande d'une multiplication peut être un nombre abſtrait, ou un nombre concret compoſé d'unités de telle eſpece qu'on voudra.

Il n'en eſt pas de même du multiplicateur qui doit marquer combien de fois le multiplicande doit être répété. Chacune de ſes unités ſimples ou collectives ne doit repréſenter qu'un nombre de fois; ainſi l'on doit néceſſairement le conſidérer comme un nombre abſtrait ou abſolu, & jamais il ne peut être regardé comme un nombre concret.

On propoſe cependant quelquefois de multiplier un nombre concret par un autre nombre concret. En ſuppoſant, par exemple, qu'une piece de bois coûte 5 *livres*, & qu'on veut ſavoir le prix de 20 pieces de bois, l'on propoſe de multiplier 5 *livres* par 20 *pieces de bois*; mais il eſt évident que cette propoſition eſt contre les regles de la multiplication, & qu'il ne faut pas multiplier 5 *livres* par le nombre concret 20 *pieces de bois*, mais ſeulement par le nombre abſolu 20 *fois*, puiſque pour avoir le prix de 20 *pieces de bois* dont chacune coûte 5 *livres*, il ſuffit de répéter 5 *livres* 20 *fois*.

Lorſque nous diſons que le multiplicateur eſt un nombre abſolu compoſé d'unités vagues ou abſtraites, nous ne parlons que de la multiplication des nombres, & nous ne prétendons point toucher à la multiplication géometrique, dans

laquelle l'un des facteurs étant une ligne, l'autre facteur peut être une ligne ou une surface, & dans laquelle le produit n'a jamais des unités de même espéce que celle de ses facteurs. Ce n'est point ici le lieu d'expliquer cette espéce de multiplication, ni la nature des unités de son produit.

COROLLAIRE III.

20 Donc, le multiplicande restant le même, si le multiplicateur devient double ou triple ou quadruple, &c de ce qu'il étoit; le produit deviendra aussi double ou triple ou quadruple, &c de ce qu'il étoit; parce que le nouveau produit contiendra le même multiplicande deux fois ou trois fois ou quatre fois, &c, plus que l'ancien produit ne le contenoit.

Le multiplicateur restant le même, si le multiplicande devient double ou triple ou quadruple, &c, de ce qu'il étoit; le produit deviendra aussi double, ou triple ou quadruple &c, de ce qu'il étoit: parce que le nouveau produit contiendra un multiplicande, double ou triple ou quadruple, &c, autant de fois que le premier produit contenoit le multiplicande simple; & qu'il est évident qu'un tout doit doubler ou triplet ou quadrupler, lorsque les parties qui le composent deviennent doubles ou triples ou quadruples &c, de ce qu'elles étoient.

1°. Il suit de là que l'on multipliera par 2, ou par 3, ou par 4, &c, le produit des deux facteurs tel que 7×5, en multipliant un seul de ces facteurs, savoir le multiplicande 7 ou le multiplicateur 5, par le nouveau multiplicateur 2, ou 3, ou 4, &c; parce qu'en multipliant ainsi l'un des deux facteurs, on rend leur produit double ou triple ou quadruple, &c, de ce qu'il étoit.

2°. Il suit encore de là que si deux nombres quelconques, par exemple 3 & 7 doivent être multipliés

l'un par l'autre, on aura toûjours le même produit; ſoit qu'on multiplie 3 par 7, ou que l'on multiplie 7 par 3; & par conſéquent ſoit que l'on écrive 3×7, ou 7×3.

Car tout nombre peut être regardé comme un produit de lui-même & de l'unité. Ainſi 1×7 eſt la même choſe que 7; & par conſéquent l'on aura le même produit ſoit qu'on multiplie 1×7 par 3, ſoit qu'on multiplie 7 par 3.

Mais pour multiplier 1×7 par 3, il ſuffira de tripler le multiplicande 1, ce qui donnera 3×7; & l'on multipliera 7 par 3 en écrivant 7×3.

Donc 3×7 eſt la même choſe que 7×3; c'eſt-à-dire que de deux nombres qui doivent être multipliés l'un par l'autre, il n'importe pas lequel on prenne pour multiplicande ou pour multiplicateur.

3°. Il ſuit de l'article précédent que ſi l'on a trois nombres tels que 2, 3, 7, à multiplier enſemble; leur produit ſera toûjours le même, quel que ſoit l'ordre qu'on ſuivra pour les multiplier: enſorte que ſi l'on écrit de ſuite ces trois facteurs, & qu'on les ſépare par la marque $\times$; l'on pourra les écrire de ces ſix maniéres, $2\times3\times7$, $3\times2\times7$, $3\times7\times2$, $7\times3\times2$, $7\times2\times3$, $2\times7\times3$.

Car nous venons de voir que les deux produits 3×7, 7×3, ſont égaux; ainſi en les multipliant par un même nombre 2, les deux produits qui en réſuteront, ſeront encore égaux: & comme les deux produits 3×7, 7×3, peuvent être multipliés par 2, ſoit en multipliant le facteur 3, ſoit en multipliant le facteur 7, & qu'on peut écrire le nouveau facteur 2 devant ou après le chiffre qu'on multipliera, il en réſultera ſix arrangemens différens des trois facteurs 2, 3, 7.

Si l'on avoit un plus grand nombre de facteurs à multiplier enſemble, l'on prouveroit de la même

maniere, qu'en les arrangeant de toutes les façons poſſibles, le produit ſeroit toujours le même.

4°. Donc ſi l'on a un nombre quelconque de facteurs à multiplier enſemble ; l'on pourra ne multiplier réellement enſemble que les facteurs qu'on voudra, & écrire devant ou après le produit les autres facteurs, en ſe ſervant de la marque × pour les ſéparer les uns des autres & du produit de ceux qu'on a multipliés.

Par exemple au lieu d'écrire $2\times3\times5\times7$, l'on pourra mettre $6\times5\times7$, ou 30×7, ou $2\times3\times35$, ou 2×105, ou $2\times15\times7$, &c, & changer comme on voudra l'ordre de ces facteurs, ſans qu'il en réſulte aucun changement dans la valeur du produit.

PROBLÈME.

21 *Multiplier l'un par l'autre deux nombres repréſentés chacun par un ſeul chiffre, c'eſt-à-dire deux nombres dont chacun eſt moindre que* 10.

Nous propoſerons deux moyens faciles pour trouver le produit de la multiplication de deux nombres dont chacun eſt moindre que 10.

Le premier moyen eſt une Table qu'on attribue à Pythagore, & qui contient les produits de tous les nombres qu'on peut écrire par un ſeul chiffre. Ceux qui ne ſont pas encore exercés dans la multiplication doivent avoir cette table devant les yeux lorſqu'ils ont une multiplication à faire.

Table de Pythagore.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Pour compoſer cette table qui contient neuf bandes chacune de neuf caſes, on écrit dans la premiere bande horiſontale la ſuite naturelle des nombres, depuis 1 juſqu'à 9. On met dans la ſeconde bande horiſontale la ſuite des nombres que l'on a, en commençant par 2, & en ajoûtant continuellement 2. La troiſiéme bande commence par 3, & en ajoûtant continuellement 3, on forme tous les nombres qui en rempliſſent les caſes : & ainſi des autres bandes qui commencent par 4, 5, 6, 7, 8, 9, & dont toutes les caſes ſont remplies de la même maniere par les nombres que l'on trouve, en ajoûtant continuellement le nombre qui eſt dans la premiere caſe.

Pour faire uſage de cette table dans la multiplication des nombres moindres que 10, l'on cherche dans la premiere bande horiſontale le multiplicande, & deſcendant juſqu'à la bande horiſontale qui commence par un nombre égal au multiplicateur, on trouve le produit qu'on demande. Par exemple, ſi l'on veut multiplier 8 par 7, on cherchera 8 dans la premiere bande horiſontale, & deſcendant juſqu'à la bande horiſontale qui commence par 7, on trouvera 56 pour le produit de 8 par 7.

Le ſecond moyen pour multiplier enſemble deux nombres moindres que 10, eſt d'opérer par ſes doigts; mais pour cela il faut ſavoir multiplier l'un par l'autre deux nombres moindres que 6. Voici comment on fait cette opération.

On ferme les deux mains, & attribuant un nombre à chaque main, on leve autant de doigts de chacune, qu'il y a d'unités depuis le nombre qu'on lui attribue juſqu'à dix; puis ayant multiplié le nombre des doigts qu'on a levés d'une main, par le nombre des doigts qu'on a levés de l'autre, on ajoûte au produit autant de dixaines qu'il y a de doigts qui n'ont pas été levés dans les deux mains.

Suppoſons, par exemple, qu'on veut multiplier 8 par 7. Ayant attribué 8 à la main droite, on en levera deux doigts, parce qu'il y a deux unités depuis 8 juſqu'à 10, & il reſtera trois doigts couchés dans cette main; attribuant le 7 à la main gauche, on en levera trois doigts, parce qu'il y a trois unités depuis 7 juſqu'à 10, & il reſtera deux doigts couchés dans cette main. Comme on a trois doigts de levés dans une main, & deux doigts de levés dans l'autre, l'on multipliera 3 par 2, ce qui donnera 6 unités pour le produit; & parce qu'il y a cinq doigts en tout de couchés, ſavoir deux dans une main, & trois dans l'autre, on

prendra ces cinq doigts couchés pour 5 dixaines ou pour 50, que l'on ajoûtera avec les 6 unités du produit qu'on a trouvé, & l'on aura 56 pour le produit de 8 par 7.

PROBLÉME.

22 *Multiplier un nombre quelconque qui n'a point de parties décimales, par un autre qui n'en a point non plus, & qui eſt repréſenté par un ſeul chiffre.*

Ayant placé le chiffre multiplicateur ſous le multiplicande, & ayant tiré une barre au-deſſous pour ſéparer les deux facteurs de la multiplication, du produit que l'on doit écrire au-deſſous; l'on multipliera chaque chiffre du multiplicande, en commençant par celui du plus bas degré, par le chiffre multiplicateur. Si chaque produit peut être écrit par un ſeul chiffre, on l'écrira au-deſſous du chiffre multiplié. Mais ſi quelques produits ne peuvent être repréſentés que par deux chiffres, on n'écrira que le premier, qui eſt du plus bas degré, au-deſſous du chiffre multiplié, & l'on retiendra l'autre pour le joindre avec le produit ſuivant. Lorſque tous les chiffres du multiplicande ſeront ainſi multipliés, & que tous les produits particuliers ſeront écrits, l'on trouvera au-deſſous de la barre le produit de la multiplication.

EXEMPLE PREMIER.

23 *Si l'on multiplie* 964 *multiplicande*
Par 4 *multiplicateur*
L'on trouvera 3856 *produit*

Pour trouver les chiffres de ce produit les uns après les autres,

1°. L'on commencera la multiplication par celle des unités ou du premier chiffre 4 du multiplicande, en diſant : quatre fois 4 font 16 ; & comme ce premier produit eſt repréſenté par deux chiffres dont le premier (6) n'exprime que des unités, & dont le ſecond (1) eſt une dixaine ou une unité du ſecond degré ; l'on écrira 6 au rang des unités au-deſſous du chiffre multiplié, & l'on retiendra 1 pour le joindre avec le produit ſuivant dont les unités ſeront du ſecond degré.

2°. Paſſant à la multiplication du ſecond chiffre (6) du multiplicande qui repréſente ſix dixaines ou ſix unités du ſecond degré ; l'on dira : 4 fois 6 font 24, & 1 qu'on a retenu du produit précédent font 25, ou plûtôt 25 dixaines ou unités du ſecond degré, dont on écrira le premier chiffre (5) au ſecond rang ; & l'on retiendra le ſecond chiffre (2) qui repréſente deux dixaines de dixaines, ou deux unités du troiſiéme degré, pour le joindre au produit ſuivant dont les unités ſeront auſſi du troiſiéme degré.

3°. Continuant la multiplication, l'on dira : 4 fois 9 font 36, & 2 qu'on a retenu du produit précédent font 38, c'eſt-à-dire 38 centaines ou unités du troiſiéme degré, dont on écrira le premier chiffre (8) au troiſiéme rang. A l'égard du ſecond chiffre (3) qui repréſente trois unités du quatriéme degré, on le retiendroit pour le joindre au produit ſuivant, ſi l'on avoit encore quelque chiffre à multiplier ; mais comme tout eſt multiplié, on placera ce chiffre 3 au quatriéme rang à la gauche du chiffre 8 que l'on vient d'écrire.

Tous les chiffres du multiplicande 964 étant multipliés par 4, & les chiffres des produits particuliers étant écrits les uns après les autres, comme on vient de l'expliquer ; l'on trouvera au-deſſous de la barre le nombre 3856 pour le produit demandé.

La démonſtration de cette opération eſt ſimple. L'on a multiplié par 4 les unités ſimples, les dixaines, les centaines, en un mot toutes les parties du multiplicande, & l'on a placé ſuivant leur ordre tous les chiffres des produits particuliers à meſure qu'on les a trouvés; ainſi tout le multiplicande a été multiplié par 4, & tous les chiffres dont le produit eſt compoſé, ont été écrits dans les rangs qui leur convenoient; donc 3856 eſt le produit de 964 par 4.

EXEMPLE II.

24 *Si l'on multiplie* 964 *multiplicande*
Par 60 *multiplicateur*
L'on aura 57840 *produit*

Si l'on avoit à multiplier le nombre 964 par 6 unités, l'on trouveroit, en ſuivant la regle que l'on vient d'expliquer, 5784 pour le produit; mais le nombre 60, par lequel il faut multiplier, eſt décuple de 6: ainſi le produit que l'on demande doit être décuple du produit 5784 que l'on trouveroit en multipliant par 6.

Or nous avons vû dans les regles de la numération que chaque chiffre d'un nombre étant avancé d'un rang vers la gauche ce qui ſe fait en mettant un zéro à la droite de ce nombre; il devient décuple de ce qu'il étoit. Donc en mettant un zéro à la droite du nombre 5784, on aura 57840 pour le produit demandé de 964 multiplié par 60.

EXEMPLE III.

25 *Si l'on multiplie* 964 *multiplicande*
Par 200 *multiplicateur*

L'on aura 192800 *produit*

En multipliant 964 par 2 unités, l'on trouveroit 1928 pour le produit; mais le nombre 200 par lequel il faut multiplier eſt centuple de 2: ainſi le produit que l'on demande doit être centuple de 1928, & par conſéquent les unités ſimples de ce nombre doivent être des centaines ou des unités du troiſiéme degré, comme celles du multiplicateur 2 centaines par lequel on doit multiplier.

Donc le nombre 1928 doit avoir à ſa droite deux zéros ou deux places, pour être le produit de 964 par 200.

On prouvera de la même maniere que ſi l'on doit multiplier par un chiffre dont les unités ſoient du quatriéme ou du cinquiéme degré, il faudra multiplier le multiplicande par ce chiffre, comme s'il ne repréſentoit que des unités du premier degré, & mettre à la droite du produit autant de zéros qu'il y a de places à la droite du chiffre multipliant.

PROBLÊME.

26 ***Multiplier un nombre quelconque qui n'a point de parties décimales par un autre nombre qui n'a point de décimales, & qui eſt repréſenté par pluſieurs chiffres.***

On multipliera tout le multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur comme on vient de le voir; & comme on aura autant de produits qu'il y aura de chiffres ſignificatifs dans le multiplicateur, on ajoûtera tous ces produits enſemble, & leur ſomme ſera le produit demandé.

EXEMPLE PREMIER.

Si l'on propoſe de multiplier	964	*multiplicande*
Par	264	*multiplicateur*
	3856	1er. *produit*
	57840	2e. *produit*
	192800	3e. *produit*
L'on trouvera	254496	*produit total*

Le multiplicateur 264 eſt compoſé de quatre unités, de ſix dixaines & de deux centaines, c'eſt-à-dire de 4, de 60, & de 200; il faudra donc multiplier le multiplicande 964 par ces trois nombres 4, 60, & 200.

1°. En multipliant par le premier chiffre 4, qui repréſente 4 unités, on aura pour le premier produit 3856 unités, dont on écrira les chiffres les uns après les autres ſous les chiffres multipliés à meſure qu'on les trouvera, comme il a été expliqué (*N°.* 23.) dans le premier exemple du Problême précédent.

2°. En multipliant par le ſecond chiffre (6) du multiplicateur, c'eſt-à-dire par 60, on aura (*N°.* 24.) pour ſecond produit 57840 qu'on écrira au-deſſous du premier produit, en obſervant de mettre les uns ſous les autres les chiffres du même degré; mais comme les chiffres de ce ſecond produit doivent être mis à meſure qu'on les trouve, aux places qui leur conviennent, on commencera par mettre un zéro à la premiere place.

3°. Pour multiplier par le troiſiéme chiffre (2) qui ſignifie 200, & qui donnera des centaines pour les unités du produit; on placera d'abord deux zéros pour remplir la place des unités & celle des dixaines; &

multipliant enſuite par 2 tous les chiffres du multiplicande les uns après les autres, on placera vers la gauche des deux zéros les chiffres du produit, à meſure qu'on les trouvera ; & l'on aura (No. 25.) 192800 pour le troiſiéme produit.

Le multiplicande 964 étant multiplié par les trois chiffres du multiplicateur, & les trois produits particuliers étant ainſi écrits, on les ajoûtera enſemble ſuivant les regles qu'on a données pour l'addition ; & l'on aura 254496 pour le produit de 964 par 264.

REMARQUE.

Comme les zéros qu'on a écrits avant de faire le ſecond & le troiſiéme produits, n'ont point d'autre propriété que celle de déterminer les chiffres du produit de la multiplication par 6 à compter des dixaines, & ceux du produit de la multiplication par 2 à compter des centaines ; on auroit pû s'épargner la peine d'écrire ces premiers zéros dans les deux derniers produits ; parce que les places des unités de tous les degrés ſont marquées par les chiffres du premier produit : & l'on auroit écrit les trois produits particuliers comme on le voit.

964	*multiplicande*
264	*multiplicateur*
3856	1er. *produit*
5784	2e. *produit*
1928	3e. *produit*
254496	*produit total*

EXEMPLE II.

Si l'on propoſe de multiplier	43216	*multiplicande*
Par	30050	*multiplicateur*
	2160800	1er. *produit*
	129648	2e. *produit*
L'on trouvera	1298640800	*produit total*

Le multiplicateur n'étant compoſé que de deux chiffres ſignificatifs 5 & 3, dont le premier ſignifie 50 ou 5 dixaines, & le ſecond 30000 ou 3 dixaines de mille, on n'aura que deux produits particuliers à trouver.

La premiere multiplication par 5 dixaines, donnera des dixaines. Ainſi l'on poſera d'abord un zéro à la place des unités : puis on multipliera le multiplicande 43216 par 5 ; & l'on écrira vers la gauche du zéro premiérement poſé, les chiffres du produit à meſure qu'on les trouvera. On dira donc : 5 fois 6 ſont 30, dont on mettra le premier caractere (0) à la ſeconde place, & l'on retiendra 3. On continuera de multiplier les autres chiffres du multiplicande par 5, comme on l'a ci-devant expliqué ; & l'on aura 2160800 pour le premier produit particulier.

La ſeconde multiplication par 3 dixaines de mille produira des dixaines de mille, qui doivent avoir quatre places à leur droite. Ainſi l'on poſera d'abord quatre zéros aux quatre premieres places, ou bien on laiſſera ces places vuides : puis on multipliera le multiplicande 43216 par 3 ; & l'on écrira vers la gauche des quatre zéros ou des quatre premieres places les chiffres du produit 129648, à meſure qu'on les trouvera.

Enfin l'on ajoûtera enſemble les deux produits particuliers qu'on vient de trouver, & ils donneront 1298640800 pour le produit total de 43216 multiplié par 30050.

EXEMPLE III.

Si l'on propoſe de multiplier	700800	*multiplicande*
Par	40600	*multiplicateur*
	420480000	1er. *produit*
	2803200....	2e. *produit*
L'on aura	28452480000	*produit total*

1°. Avant de multiplier le multiplicande par le premier chiffre ſignificatif (6) qui a deux zéros ou deux places à ſa droite, & qui doit par conſéquent produire des unités du troiſiéme degré, l'on commencera par écrire deux zéros dans les deux premieres places ; enſuite on dira : 6 fois 0 eſt zéro, & l'on écrira un zéro à la troiſiéme place, c'eſt-à-dire, à la gauche de ceux qu'on a premierement poſés. Paſſant à la multiplication du ſecond chiffre du multiplicande, on dira encore : 6 fois 0 eſt zéro, & l'on écrira auſſi un zéro à la quatriéme place. Continuant la multiplication, l'on dira : 6 fois 8 font 48, pour lequel produit l'on écrira 8 à la cinquiéme place, & l'on retiendra 4. Enſuite on dira : 6 fois 0 eſt zéro, & 4 qu'on a retenu font 4 qu'on écrira à la ſixiéme place ; puis on dira : 6 fois 0 eſt zéro, & l'on écrira zéro à la ſeptiéme place. Enfin l'on dira, pour finir la premiere multiplication : 6 fois 7 font 42, & l'on écrira 2 à la huitiéme place, & 4 à la neuviéme. En opérant ainſi, l'on aura 420480000 pour le premier produit.

2°. Avant de multiplier le multiplicande par le deuxiéme chiffre ſignificatif (4) qui a 4 places à ſa

droite, on remplira par 4 zéros les quatre premieres places du ſecond produit qu'on doit écrire ; ou bien, comme ces quatre premieres places ſont déja marquées par les chiffres du premier produit, on laiſſera ces quatre premieres places vuides, & l'on multipliera enſuite 700800 par 4, de la même maniere qu'on vient de le multiplier par 6, ce qui donnera pour le ſecond produit 28032000000.

Enfin l'on ajoûtera les deux produits particuliers, & l'on aura 28452480000 pour le produit total.

PROBLÊME.

27 *Multiplier un nombre qui contient des parties décimales, par un autre nombre qui contient ou qui ne contient point de parties décimales.*

On multipliera le multiplicande par le multiplicateur, comme ſi aucun d'eux ne contenoit de parties décimales. Le produit total de la multiplication étant trouvé, ſuivant les regles que nous avons expliquées, on y mettra une virgule qui en ſéparera vers la droite autant de chiffres décimaux, qu'il y en aura en tout dans le multiplicande & dans le multiplicateur.

EXEMPLE PREMIER.

Si l'on propoſe de multiplier	74, 964	*multiplicande*
Par	264	*multiplicateur*
	299, 856	1er. *produit*
	4497, 84	2e. *produit*
	14992, 8	3e. *produit*
L'on aura	19790, 496	*produit total*

Le multiplicande (74, 964) ſignifie 74964 *milliémes*, & peut être regardé comme un nombre ordinaire dont les unités principales ſont des *milliémes*. Cela poſé, les unités du produit ſeront des *milliémes*, & ce produit

produit ſera 19790496 *milliémes*; parce que (*N°.* 18.) les unités du produit ſont toûjours de même eſpece que celles du multiplicande, lorſqu'on multiplie par un nombre ordinaire ſans décimales.

Il faut donc faire connoître que les unités du produit 19790496 ſont des *milliémes*, de même que celles du multiplicande. Pour cela il faut placer dans ce produit une virgule qui en ſépare trois chiffres décimaux, ou en général, qui en ſépare autant de chiffres décimaux, qu'il y en a dans le multiplicande.

Donc pour multiplier un nombre qui contient des décimales par un autre qui n'en contient point; il faut faire la multiplication comme ſi le multiplicande n'avoit point de décimales, & mettre enſuite dans le produit une virgule qui en ſépare autant de décimales, qu'il y en a dans le multiplicande.

Comme le multiplicateur n'a point de décimales dans l'exemple propoſé, les chiffres décimaux qui ſe trouvent dans le multiplicande, ſont tout ce qu'il y en a dans le multiplicande & le multiplicateur enſemble. Ainſi la regle générale: qui veut que l'on ſépare du produit autant de chiffres décimaux qu'il y en a en tout dans le multiplicande & le multiplicateur, eſt applicable à ce premier exemple.

EXEMPLE II.

Si l'on propoſe de multiplier	74964	*multiplicande*
Par	2, 64	*multiplicateur*
	2998, 56	1er. *produit*
	44978, 4	2e. *produit*
	149928	3e. *produit*
L'on aura	197904, 96	*produit total*

En conſidérant le multiplicateur comme un nombre d'unités, ou ſupprimant ſa virgule; on trouvera

pour le produit 19790496 unités ſimples. Mais le multiplicateur propoſé (2, 64) qui ſignifie 264 *centiémes*, n'eſt que la centiéme partie de 264 unités : ainſi le produit ne doit être que la centiéme partie du produit 19790496 qu'on a trouvé en multipliant par 264. Il faut donc changer les unités de ce produit en *centiémes* ; ce qu'on fera en y plaçant une virgule qui en ſéparera autant de chiffres décimaux, qu'il y en a dans le multiplicateur.

Comme le multiplicande n'a point de chiffres décimaux, ceux du multiplicateur ſont ce qu'il y en a en tout dans le multiplicande & dans le multiplicateur. Ainſi la regle qu'on a donnée dans le problême, eſt encore applicable à ce ſecond exemple.

EXEMPLE III.

Si l'on propoſe de multiplier	74, 964	*multiplicande*
Par	2, 64	*multiplicateur*
	2, 99856	1er. *produit*
	44, 9784	2e. *produit*
	149, 928	3e. *produit*
L'on aura	197, 90496	*produit total*

En multipliant le multiplicande (74, 964) qui a trois chiffres décimaux, par le multiplicateur conſidéré comme un nombre d'unités ſimples ; c'eſt-à-dire en multipliant (74, 964) par 264 ; on trouvera, comme dans le premier exemple, (19790,496) pour le produit.

Mais ce produit (19790, 496) eſt centuple de celui qu'on demande, parce qu'on a multiplié par 264 qui eſt centuple du multiplicateur donné (2, 64) : ainſi ce produit doit devenir cent fois plus petit ; & par conſéquent il faut encore avancer la virgule vers la gauche d'autant de places qu'il y en a après la vir-

gule du multiplicateur. Et comme il y avoit déjà autant de places à la droite de la virgule du produit, qu'il y en a dans le multiplicande ; il y aura néceſſairement à la droite de la virgule du produit autant de places ou de chiffres décimaux, qu'il y en a en tout dans le multiplicande & dans le multiplicateur. Ainſi (197, 90496) ſera le produit de (74, 964) par (2, 64) conformément à la regle générale (*N°.* 27.).

Exemple IV.

Si l'on propoſe de multiplier	0, 125	*multiplicande*
Par	0, 0625	*multiplicateur*
	625	1er. *produit*
	250	2e. *produit*
	750	3e. *produit*
L'on aura	0, 0078125	*produit total*

Lorſque le multiplicande ſera multiplié par le multiplicateur, comme ſi les deux facteurs ne contenoient point de chiffres décimaux, & que tous les produits particuliers auront été ajoûtés enſemble ; on placera dans le produit total une virgule de maniere qu'elle ait à ſa droite autant de chiffres décimaux, qu'il y en a en tout dans le multiplicande & le multiplicateur. Et comme l'on trouvera ſept chiffres décimaux en tout dans les deux facteurs, & qu'il n'y a que cinq chiffres dans le produit ; il faudra mettre encore deux zéros à la gauche de ce produit, pour avoir ſept figures décimales, & placer enſuite une virgule à la gauche de ces ſept figures, afin qu'elles ſoient réputées décimales : on mettra même auſſi un zéro à la gauche de la virgule pour tenir la place des unités, & l'on aura (0, 0078125) pour le produit de (0, 125) multiplié par (0, 0625).

CHAPITRE IV.

De la Diviſion des Nombres incomplexes.

DÉFINITIONS.

28 DIVISER un nombre par un autre, c'eſt chercher un troiſiéme nombre qui multiplié par le ſecond, donne un produit égal au premier nombre.

Le nombre qu'on diviſe s'appelle *dividende*; celui par lequel on diviſe s'appelle *diviſeur*; & l'on donne le nom de *quotient* au troiſiéme nombre qui réſulte de la diviſion.

Lorſqu'on veut ſeulement marquer que deux nombres ſont ou doivent être diviſés l'un par l'autre, on écrit le diviſeur au-deſſous du dividende avec une barre horiſontale entre les deux. Par exemple, ſi l'on veut marquer que le nombre 32 *toiſes* eſt, ou doit être diviſé par le nombre 8 *toiſes*, l'on écrit

$$\frac{32 \text{ toiſes}}{8 \text{ toiſes}}$$

COROLLAIRE PREMIER.

29 Il faut donc que le diviſeur ou le quotient ſoit un nombre abſtrait, & que l'un des deux ait des unités de même eſpece que celles du dividende; ſans quoi le diviſeur & le quotient multipliés l'un par l'autre, ne produiroient pas une quantité égale au dividende: & ſuivant que le diviſeur ſera un nombre abſtrait, ou un nombre de même eſpece que le dividende, on pourra ſe former deux idées différentes de la diviſion.

1°. Lorſque le diviſeur ſera un nombre de même eſpece que le dividende, le quotient qu'on trouvera ſera néceſſairement un nombre abſtrait, qui marquera combien de fois le diviſeur doit être répété pour produire le dividende. Dans ce cas, l'on pourra dire que *la diviſion eſt une opération par laquelle on trouve combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende* : & ce *combien de fois* que l'on trouve, étant exprimé en latin par le mot *Quoties*, on lui a donné le nom de *quotient*.

Par exemple, ſi l'on propoſe de diviſer 32 toiſes par 8 toiſes, ou de trouver un troiſiéme nombre qui multipliant 8 toiſes produiſe le premier nombre 32 toiſes; le nombre 4 que l'on trouvera ſera un nombre abſolu qui ſignifiera qu'il faut prendre 8 toiſes 4 fois pour produire 32 toiſes, & que 8 toiſes ſont par conſéquent cõtenues 4 fois dans le dividende 32 toiſes. Ainſi la diviſion du dividende 32 toiſes, par le diviſeur 8 toiſes de même eſpece, ſe réduira à trouver combien de fois le diviſeur 8 toiſes eſt contenu dans le dividende 32 toiſes; & le nombre 4 que l'on trouvera, & qui ſignifiera 4 fois, ſera le quotient proprement dit de cette diviſion.

2°. Lorſque le diviſeur ſera compoſé d'unités abſolues, il marquera combien de fois le quotient que l'on cherche doit être répété pour produire le dividende. Ainſi pour avoir ce quotient, il faudra partager le dividende en autant de parties égales que le diviſeur aura d'unités abſolues. Dans ce ſecond cas, l'on pourra dire que *la diviſion eſt une opération par laquelle on partage le dividende en autant de parties égales qu'il y a d'unités abſolues dans le diviſeur, pour avoir une de ces parties qui ſera néceſſairement de même eſpece que le dividende.*

Par exemple, ſi l'on propoſe de diviſer 32 toiſes par le nombre abſolu 4, ou de trouver un nombre

qui répété quatre fois produiſe 32 toiſes; il eſt clair que le nombre qu'on trouvera ſera la quatriéme partie de 32 toiſes, & ſera par conſéquent un nombre de toiſes. Ainſi la diviſion ſe réduira à partager 32 toiſes en quatre parties égales, pour avoir une de ces parties, qui ſera 8 toiſes; mais ces 8 toiſes qu'on trouvera ne ſeront nommées *Quotient* qu'improprement, puiſque ne ſignifiant pas 8 *fois*, elles ne répondent pas au mot *Quoties*, qui ſignifie *combien de fois*.

3°. Lorſque le dividende & le diviſeur ſeront tous deux des nombres abſolus, le quotient ſera auſſi un nombre abſolu; & l'on pourra appliquer à la diviſion les deux définitions particulieres que nous venons de donner de cette opération.

Par exemple, ſi l'on propoſe de diviſer le nombre abſolu 32 par le nombre abſolu 8, la diviſion ſe réduira, ſuivant la premiere des deux définitions particulieres, à trouver combien de fois le diviſeur 8 eſt contenu dans le dividende 32 qui eſt de même eſpece que lui. En conſidérant ainſi la diviſion, le nombre 4 que l'on trouvera, & qui ſignifiera 4 *fois*, ſera le quotient proprement dit de 32 diviſé par 8.

Mais le diviſeur 8 étant un nombre abſolu, peut auſſi indiquer qu'il faut prendre la huitiéme partie du dividende 32; & cette façon de conſidérer la diviſion eſt conforme à l'idée que nous en avons donnée dans la deuxiéme définition particuliere.

Lorſque nous diſons qu'il faut que le diviſeur ou le quotient ſoit un nombre abſtrait, & que l'un des deux doit avoir des unités de même eſpece que le dividende, cela ne doit s'entendre que de la diviſion arithmétique, & nous ne prétendons point toucher à la diviſion géométrique, dont nous parlerons dans la ſuite.

COROLLAIRE II.

30 Nous avons aſſez expliqué les différentes manieres de conſidérer la diviſion, pour qu'on voye clairement que le nombre des unités du quotient ſera le même, lorſque le dividende & le diviſeur auront des unités de même eſpece, que quand le diviſeur ſera un nombre abſtrait, & que les quotiens ne ſeront différens que par la nature de leurs unités.

Par exemple, ſi l'on propoſe ces deux diviſions, 32 toiſes à diviſer par 8 toiſes, & 32 toiſes à diviſer par 8 ; les quotiens ſeront compoſés l'un & l'autre de 4 unités, & ne différeront qu'en ce que les unités du premier ſeront abſolues, & que les unités du ſecond ſeront des toiſes.

On pourra donc, lorſqu'on aura une diviſion à faire, ne conſidérer d'abord que les nombres des unités du dividende & du diviſeur, ſans faire attention à la nature de ces unités, & chercher pour le quotient un nombre abſolu qui indique combien de fois le nombre des unités du diviſeur eſt contenu dans le nombre des unités du dividende, comme ſi le dividende & le diviſeur avoient des unités de même eſpece. Enſuite on pourra déterminer de quelle eſpece doivent être les unités de ce quotient, en obſervant, comme nous l'avons prouvé, que ces unités ſeront abſtraites lorſque le dividende & le diviſeur ſeront véritablement de même eſpece, & qu'elles ſeront de même nature que celles du dividende lorſque le diviſeur ſera un nombre abſolu. En conſidérant ainſi la diviſion, il ſera facile d'en déduire les Corollaires ſuivans.

COROLLAIRE III.

31 1°. Si l'on multiplie le dividende d'une diviſion par un nombre quelconque, ſans rien changer à ſon diviſeur ; le quotient de la nouvelle diviſion ſera égal au quotient de la premiere multiplié par le même nombre.

Par exemple, ſi l'on a 32 à diviſer par 8, ce qui s'exprime ainſi $\frac{32}{8}$, le quotient ſera 4 : & ſi l'on multiplie le dividende 32 par 2 ou par 3, &c, ſans rien changer au diviſeur 8, on aura ces nouvelles diviſions $\frac{64}{8}$, $\frac{96}{8}$, &c. dont les quotiens 8, 12, &c; ſeront égaux au premier quotient 4 multiplié par 2 ou par 3, &c. Car il eſt évident qu'un diviſeur conſtant eſt contenu deux fois davantage dans un dividende double, trois fois davantage dans un dividende triple, &c.

2°. Et réciproquement ſi l'on diviſe le dividende d'une diviſion par un nombre quelconque, ſans rien changer à ſon premier diviſeur ; le quotient de la nouvelle diviſion ſera égal au quotient de la premiere, diviſé par le même nombre.

Par exemple, ſi l'on a 96 à diviſer par 8, c'eſt-à-dire $\frac{96}{8}$ dont le quotient eſt 12, & qu'on diviſe le dividende 96 par 2 ou par 3, &c; l'on aura ces nouvelles diviſions $\frac{48}{8}$, $\frac{32}{8}$, &c, dont les quotiens 6, 4, &c, ſeront égaux au premier quotient 12 diviſé par 2 ou par 3, &c; car en diviſant le dividende par 2 ou par 3, &c, on le rend deux fois ou trois fois, &c, plus petit qu'il n'étoit : ainſi le diviſeur conſtant 8 doit y être contenu deux fois, ou trois fois, &c, moins qu'auparavant ; & par conſéquent le quotient doit être deux fois ou trois fois, &c, moindre que le premier quotient, c'eſt-à-dire égal au premier quotient diviſé par 2 ou par 3, &c.

COROLLAIRE IV.

32 1°. Si l'on multiplie le diviſeur d'une diviſion par un nombre quelconque, ſans rien changer à ſon dividende; le quotient de la nouvelle diviſion ſera égal à celui de la premiere, diviſé par le même nombre qui a multiplié le diviſeur.

Par exemple, ſi l'on a 96 à diviſer par 8, c'eſt-à-dire $\frac{96}{8}$ dont le quotient eſt 12; & que ſans rien changer au dividende 96, on multiplie le diviſeur 8 par 2 ou par 3, &c; on aura ces nouvelles diviſions $\frac{96}{16}$, $\frac{96}{24}$, &c dont les quotiens 6, 4, &c ſeront égaux au premier quotient 12 diviſé par les nombres 2, 3, &c qui ont multiplié le diviſeur. Car il eſt évident qu'un diviſeur devenu double ou triple &c, eſt contenu deux fois ou trois fois moins &c dans un même dividende: ainſi le quotient doit être deux fois ou trois fois &c plus petit qu'il n'auroit été, ſi l'on n'avoit point multiplié le diviſeur par 2 ou par 3 &c.

2°. Et réciproquement, ſi l'on diviſe par un nombre quelconque le diviſeur d'une diviſion, ſans rien changer au dividende; le quotient de la nouvelle diviſion ſera égal à celui de la premiere, multiplié par le nombre qui a diviſé ſon diviſeur.

Par exemple, ſi l'on a 96 à diviſer par 24, c'eſt-à-dire $\frac{96}{24}$ dont le quotient eſt 4; & que ſans changer le dividende 96, on diviſe le diviſeur 24 par 2 ou par 3 &c, l'on aura ces nouvelles diviſions $\frac{96}{12}$, $\frac{96}{8}$, &c dont les quotiens 8, 12, &c ſeront égaux au premier quotient 4 multiplié par les nombres 2, 3, &c qui ont diviſé le diviſeur; parce qu'en diviſant un diviſeur par 2 ou par 3 &c, on le rend deux fois ou trois fois &c plus petit; & qu'il eſt évident qu'un diviſeur 2 fois ou 3 fois &c plus petit, eſt contenu 2 fois ou 3 fois &c davantage dans un même dividende.

COROLLAIRE V.

33 1°. Donc ſi l'on multiplie le dividende & le diviſeur d'une diviſion par une même quantité, le quotient de la diviſion du nouveau dividende par le nouveau diviſeur, ſera le même que le quotient de la premiere diviſion.

Par exemple, ſi l'on a 32 à diviſer par 8, c'eſt-à-dire $\frac{32}{8}$ dont le quotient eſt 4; & qu'on multiplie le dividende & le diviſeur par 2 ou par 3 ou par une même quantité, l'on aura ces nouvelles diviſions $\frac{64}{16}$, $\frac{96}{24}$, &c qui auront le même quotient 4 que la premiere diviſion. Car en multipliant le dividende & le diviſeur d'une diviſion par une même quantité, le quotient de la premiere diviſion eſt en même temps multiplié & diviſé par cette même quantité (*N°.* 31 & 32.) & ne change par conſéquent point de valeur.

2. Si l'on diviſe le dividende & le diviſeur d'une diviſion par une même quantité, le quotient de la nouvelle diviſion ſera encore le même que celui de la premiere diviſion; puiſque par cette opération l'on diviſe & l'on multiplie également le quotient de la premiere diviſion (*N°.* 31 & 32.).

Par exemple, ſi l'on a 96 à diviſer par 24, c'eſt-à-dire $\frac{96}{24}$ dont le quotient eſt 4; & qu'on diviſe le dividende 96 & le diviſeur 24 par 2 ou par 3 ou par une même quantité quelconque, l'on aura ces nouvelles diviſions $\frac{48}{12}$, $\frac{32}{8}$, &c qui auront toutes le même quotient 4, comme la premiere diviſion $\frac{96}{24}$.

COROLLAIRE VI.

34 Lorſqu'un dividende doit être diviſé par un diviſeur compoſé de pluſieurs facteurs multipliés enſemble;

au lieu de diviſer le dividende par le diviſeur compoſé, l'on pourra le diviſer par un facteur du diviſeur; puis diviſer le quotient de cette diviſion par un ſecond facteur du diviſeur, & continuer toûjours de diviſer le nouveau quotient par un nouveau facteur du diviſeur, juſqu'à ce que l'on ait diviſé par tous les facteurs. La derniere diviſion étant faite, le dernier quotient ſera le quotient de la diviſion du dividende par le diviſeur compoſé.

Par exemple, ſi l'on doit diviſer 840 par le diviſeur compoſé $3\times5\times7$; ce qu'on peut exprimer ainſi $\frac{840}{3\times5\times7}$; au lieu de faire le produit des trois facteurs 3, 5, 7, & de diviſer enſuite par leur produit 105 le dividende 840; on pourra diviſer d'abord 840 par 3, ce qui donnera 280 pour un premier quotient; puis diviſer ce quotient 280 par 5, ce qui donnera 56 pour un ſecond quotient; & diviſer enfin ce quotient 56 par 7, ce qui donnera 8 pour le dernier quotient qui ne différera pas de celui qu'on auroit eu en diviſant 840 par le produit 105 des trois facteurs 3, 5, 7.

Car $\frac{840}{3\times5\times7}$ repréſentant la diviſion de 840 par $3\times5\times7$, ſi l'on diviſe le dividende 840 & le diviſeur $3\times5\times7$ par le même nombre 3, la nouvelle diviſion $\frac{280}{5\times7}$ aura le même quotient (*N°.* 33.). Si l'on diviſe encore le nouveau dividende 280 & le nouveau diviſeur 5×7, par le nombre 5; la diviſion $\frac{56}{7}$ qui reſtera à faire aura encore le même quotient (*N°.* 33.). Donc en diviſant 840 par 3, & le quotient de cette diviſion par 5, & diviſant encore le nouveau quotient par 7, on aura le même quotient que l'on auroit en diviſant 840 par le diviſeur compoſé $3\times5\times7$.

Avertiſſement.

35 Nous ſuppoſerons dans la ſuite, qu'on ſçaît diviſer tout nombre moindre que 90 par tout autre nombre moindre que 10. Ceux qui ne ſont pas aſſez exercés dans la diviſion pour trouver aiſément les quotiens & les reſtes de toutes ces diviſions, pourront avoir recours à la Table de Pythagore (*N°.* 21.) dont voici l'uſage.

On cherchera au haut de la table le nombre par lequel on doit diviſer ; puis on deſcendra verticalement juſqu'à ce qu'on trouve le nombre que l'on doit diviſer, ou un nombre plus petit qui en approche le plus ; & allant de ce nombre vers la gauche de la table, on trouvera vis-à-vis dans la premiere colonne verticale le quotient de la diviſion.

Suppoſons qu'on veut diviſer 72 par 8. On prendra 8 au haut de la table, & l'on deſcendra verticalement juſqu'à 72 ; puis allant de 72 vers la gauche de la table, on trouvera vis-à-vis dans la premiere colonne le quotient 9 que l'on demande.

Suppoſons maintenant qu'on veut diviſer 64 par 7. L'on prendra 7 au haut de la table, & deſcendant verticalement au-deſſous de 7, on ne trouvera pas 64, mais 63 qui eſt plus petit & qui en approche le plus ; on s'arrêtera donc au nombre 63, & allant de 63 vers la gauche de la table, on trouvera vis à-vis dans la premiere colonne le nombre 9 qui ne ſera que le quotient de 63 diviſé par 7 : & comme c'eſt 64 & non 63 qu'on a propoſé de diviſer par 7, la diviſion aura un reſte 1 qui ne ſera pas diviſé.

PROBLÊME.

36 *Diviſer un nombre par un autre nombre repréſenté par un ſeul chiffre.*

On diviſera toutes les parties du dividende par le diviſeur, en commençant la diviſion par celle des chiffres dont les unités ſont du plus haut degré. Suppoſant, par exemple, que le dividende eſt compoſé de trois chiffres, d'unités ſimples, de dixaines & de centaines; on commencera par diviſer la partie des centaines qui peut être partagée en autant de parties égales que le diviſeur a d'unités. Enſuite on réduira le reſte des centaines en dixaines, & les ayant ajoûtées avec les dixaines du dividende, on diviſera encore la partie des dixaines qui peut être partagée en autant de parties égales que le diviſeur a d'unités. Enfin l'on réduira le reſte des dixaines en unités ſimples, pour les ajoûter avec les unités ſimples du dividende & diviſer le tout par le diviſeur.

On voit par cet expoſé qu'on aura autant de diviſions particulieres à faire, que de parties différentes du dividende à diviſer; & qu'il faudra par conſéquent écrire autant de quotiens particuliers, qu'on aura de diviſions à faire.

Pour rendre plus ſenſibles les opérations que nous venons d'expoſer en général, nous allons les détailler dans quelques exemples.

EXEMPLE PREMIER.

On propoſe de diviſer 952 par 4.

On écrira le diviſeur à la droite du dividende, & les ayant ſéparés par une barre verticale ou par un crochet; on tirera ſous le diviſeur une barre au-deſſous

de laquelle ſeront écrits les chiffres du quotient à meſure qu'on les trouvera.

Dividende 952 | 4 *diviſeur*
8 | 2 *quotient de la 1ere. diviſion*
Reſte de la 1ere. diviſion 1

Le dividende & le diviſeur étant ainſi diſpoſés, on commencera à diviſer les 9 centaines par 4, en diſant : la quatriéme partie de 9 centaines eſt 2 centaines ; ou plus ſimplement, la quatriéme partie de 9 eſt 2 qu'on écrira au quotient dans une place qui ſera celle des centaines.

Pour déterminer la partie de 9 qu'on a diviſée & trouver le reſte de la diviſion, l'on multipliera le diviſeur 4 par le quotient 2, ce qui produira 8 que l'on écrira au-deſſous de 9 ; puis on retranchera 8 de 9, & le reſte 1 que l'on écrira au-deſſous ſera la partie des 9 centaines qui n'a pas été diviſée par 4.

Abaiſſant à la droite du reſte 1 des centaines les 5 dixaines du dividende, on aura 15 dixaines à diviſer par 4 ; ainſi l'on prendra la quatriéme partie de ces 15 dixaines, qui ne peut être que 3 dixaines avec un reſte.

Dividende 952 | 4 *diviſeur*
8 | 23 *quotient des deux premieres diviſions*
15
12
Reſte de la 2e. diviſion 3

On écrira donc 3 au quotient à la place des dixaines, c'eſt-à-dire à la droite des deux centaines qu'on a écrites pour le quotient de la premiere diviſion.

Il faut maintenant déterminer la partie des 15 dixaines qui n'a pas été diviſée. Pour cela, on multipliera le diviſeur 4 par le quotient 3, ce qui produira 12; & ayant écrit ce produit 12 au-deſſous des 15 dixaines ſur leſquelles on opere actuellement, on le retranchera de 15, ce qui donnera 3 dixaines pour le reſte de la diviſion, ou pour la partie des 15 dixaines qui n'a pas été compriſe dans la diviſion.

Le reſte 3 de la diviſion des 15 dixaines étant écrit au-deſſous des dixaines, on abaiſſera à ſa droite les deux unités du dividende, & l'on aura 32 unités ſimples à diviſer par le même diviſeur 4. On prendra donc la quatriéme partie de 32; & comme on ſçait qu'elle eſt 8, on écrira 8 au quotient dans le rang des unités ſimples, c'eſt-à-dire à la droite des 3 dixaines.

Dividende 952 { 4 *diviſeur*
8 { 238 *quotient entier*

15
12

32
32

Pour connoître ſi cette derniere diviſion n'a point de reſte, on multipliera le diviſeur 4 par le quotient 8 que l'on vient de trouver, ce qui produira 32 pour la partie des unités qu'on vient de diviſer: ainſi écrivant, ſi on le juge à propos, ce produit 32 au-deſſous des 32 unités qu'on avoit encore à diviſer, & ôtant l'un de l'autre, il ne reſtera rien; ce qui aſſure que la diviſion n'a point de reſte, & que le diviſeur 4 eſt contenu 238 fois dans 952.

EXEMPLE II.

On propoſe de diviſer 7264 par 9.

Le dividende & le diviſeur étant diſpoſés comme dans le premier exemple, on diviſera les unes après les autres toutes les parties du dividende, en commençant par les mille, & paſſant enſuite aux centaines, puis aux dixaines & aux unités.

Dividende	7264	9	*diviſeur*
	72	8	*quotient*
Premier reſte	0		

1°. Comme le premier chiffre 7 ne peut pas être diviſé par 9, on le joindra au chiffre ſuivant, & l'on aura 72 à diviſer par 9; & comme 9 y eſt contenu huit fois, on écrira 8 au quotient dans une place qui ſera celle des centaines.

Pour avoir le reſte de cette première diviſion, l'on multipliera le diviſeur 9 par le quotient 8; & ayant écrit leur produit 72 au-deſſous de 72 qu'on vient de diviſer, on retranchera l'un de l'autre; & comme il ne reſtera rien, on écrira au-deſſous un zéro qui marquera que la diviſion de 72 centaines par 9, donne exactement 8 centaines pour quotient, ſans aucun reſte.

Dividende	7264	9	*diviſeur*
	72	80	*quotient*
Second reſte	06		

2°. On abaiſſera à la droite du zéro les 6 dixaines du dividende pour les diviſer auſſi par 9; & comme cela

cela n'eſt pas poſſible, on écrira au quotient un zéro à la place des dixaines, pour marquer que le quotient ne contiendra point de dixaines : & le 6 que l'on vient d'abaiſſer, & qui n'a pas pû être diviſé, reſtera pour la diviſion ſuivante.

Dividende 7264 { 9 *diviſeur*
72 { 807 *quotient*
064
63
Dernier reſte de la diviſion 1

3°. On abaiſſera les 4 unités du dividende à la droite des 6 dixaines que l'on a de reſte, ce qui fera 64 unités qu'on diviſera par 9 ; & comme on trouvera que 9 y eſt contenu 7 fois, on écrira 7 au quotient à la place des unités : & la diviſion ſera faite.

Mais quoique la diviſion ſoit finie, puiſqu'on a trouvé tous les chiffres qui compoſent le quotient ; il faut encore déterminer le reſte de la diviſion. Pour cela on multipliera le diviſeur 9 par le dernier quotient 7 ; & le produit 63 étant écrit au-deſſous de 64, & enſuite retranché de 64 ; on aura 1 pour le reſte de la diviſion.

Le dividende 7264 étant diviſé par le diviſeur 9 ; donne donc 807 pour le quotient, avec un reſte 1 qui n'a pas été diviſé ; enſorte que 807 n'eſt le quotient exact que de 7263 diviſé par 9.

PROBLÊME.

37 *Diviſer un nombre par un autre nombre compoſé de pluſieurs chiffres.*

La diviſion d'un nombre par un autre compoſé de pluſieurs chiffres, ſe fait de la même maniere que celle

dont le diviſeur n'a qu'un chiffre. L'on diviſe par le diviſeur chaque partie du dividende qui peut être partagée en autant de parties égales que le diviſeur contient d'unités. Puis ayant écrit au quotient le nombre de fois que chaque partie du dividende contient le diviſeur; on multiplie le diviſeur par les chiffres du quotient à meſure qu'on les trouve, & l'on écrit les produits ſous les parties du dividende que l'on diviſe actuellement. Enſuite on retranche ces produits des parties du dividende, & l'on écrit les reſtes pour les diviſer conjointement avec les parties ſuivantes du dividende. On va faire l'application de cette regle dans les exemples ſuivans.

EXEMPLE PREMIER.

On propoſe de diviſer 1728 *par* 288.

Dividende	1728	288	*diviſeur*
	1728	6	*quotient*
Reſte	0		

Le dividende & le diviſeur étant diſpoſés comme dans les exemples du problême précédent; on propoſera d'abord de diviſer les trois premiers chiffres du dividende qui valent 172 *dixaines*, par les trois chiffres 288 du diviſeur; & comme cela n'eſt pas poſſible, on prendra tous les quatre chiffres 1728 du dividende, pour les diviſer par 288. Mais n'étant pas facile de voir tout d'un coup combien de fois 288 eſt contenu dans 1728; on abandonnera pour un moment les unités & les dixaines du dividende & du diviſeur, & l'on cherchera combien de fois les deux centaines du diviſeur ſont contenues dans les 17 centaines du dividende, c'eſt-à-dire combien de fois 2 eſt contenu dans 17.

On trouvera d'abord qu'il y eſt 8 fois ; mais comme les dixaines & les unités du diviſeur ne ſont pas contenues huit fois dans les dixaines & les unités du dividende, on n'écrira pas pour quotient ce nombre 8 qui marque le nombre de fois que les 2 centaines du diviſeur ſont dans les 17 centaines du dividende, & l'on prendra un nombre plus petit, afin qu'il reſte quelques centaines qui jointes aux dixaines du dividende, puiſſent contenir les dixaines du diviſeur le nombre de fois qu'on aura écrit au quotient.

Comme il eſt difficile de voir d'abord au juſte le vrai quotient que l'on doit écrire ; on commencera par prendre, ſans les écrire, différens quotiens continuellement plus petits d'une unité que celui qui exprime combien de fois les 2 centaines du diviſeur ſont contenues dans les 17 centaines du dividende, juſqu'à ce que l'on ſoit parvenu à un nombre dont le produit par le diviſeur entier ne ſoit pas plus grand que le dividende.

En diminuant ainſi continuellement le premier quotient d'une unité, l'on trouvera enfin le nombre 6 qui n'étant pas trop grand pour le quotient, ſera mis à la place que l'on deſtine au quotient ; enſuite on multipliera le diviſeur entier 288 par le quotient 6 ; & les chiffres du produit étant écrits à meſure qu'on les trouvera, ſous les chiffres correſpondans du dividende, l'on retranchera ce produit du dividende.

Comme dans le préſent exemple, la ſouſtraction ne donne point de reſte ; c'eſt une marque que le diviſeur 288 eſt contenu 6 fois exactement dans le dividende 1728.

EXEMPLE II.

On propoſe de diviſer 4571112 *par* 897.

Dividende	4571112	897	*diviſeur*
	4485	5	*quotient*
Premier reſte	86		

1°. Le dividende & le diviſeur étant diſpoſés comme nous l'avons déjà dit, & les trois chiffres du diviſeur, faiſant un nombre plus grand que les trois premiers chiffres de la gauche du dividende; on prendra un chiffre de plus dans le dividende, c'eſt-à-dire qu'on prendra d'abord 4571 *mille* pour les diviſer par 897, ſans faire aucune attention aux centaines, aux dixaines & aux unités du dividende, qu'on diviſera enſuite avec ce qui reſtera de la diviſion des *mille*.

Comme on prend dans le dividende un chiffre de plus qu'il n'y en a dans le diviſeur; les 8 centaines du diviſeur répondront aux 45 *centaines de mille*: ainſi l'on cherchera combien de fois 8 centaines ſont contenues dans 45 centaines. Comme on trouvera qu'elles y ſont contenues 5 fois avec un reſte 5 qui étant joint aux *dixaines de mille*, donnera un nombre ſuffiſant pour contenir auſſi cinq fois les dixaines du diviſeur, on écrira au quotient ce premier chiffre 5 qui repréſentera 5 *mille*.

Pour avoir le reſte de cette premiere diviſion, l'on multipliera le diviſeur 897 par le quotient 5; & ayant écrit les chiffres de leur produit 4485, à meſure qu'on les aura trouvés, ſous les chiffres correſpondans 4571 du dividende; on retranchera ce produit du dividende, & l'on aura le premier reſte 86 qu'on écrira au-deſſous.

2°. L'on abaiſſera la centaine du dividende, & l'ayant pointée pour marquer qu'elle eſt abaiſſée, on la placera à la droite de 86 reſtant de l'opération précédente ; ce qui fera 861 *centaines*, ou plus ſimplement 861, ſi l'on ne fait point attention aux dixaines & aux unités du dividende, dont il n'eſt point encore queſtion.

Dividende	4571112	897	*diviſeur*
	4485	50	*quotient*
Second reſte	861		

On ſe propoſera donc de diviſer 861 par 897 ; & comme cela ne ſe peut pas, on écrira au quotient un zéro qui marquera que le quotient ne doit point contenir de *centaines*.

3°. Le nombre 861 qui ſignifie 861 *centaines*, n'ayant pû être diviſé par 897 dans l'opération précédente, eſt reſté tout entier pour être diviſé conjointement avec les *dixaines* du dividende ; on pointera donc la *dixaine* du dividende & on l'abaiſſera à la droite de 861, ce qui donnera 8611 *dixaines* que l'on diviſera par 897.

Dividende	4571112	897	*diviſeur*
	4485	509	*quotient*
	8611		
	8073		
Troiſiéme reſte	538		

Comme il y a un chiffre de plus au nouveau dividende 8611 qu'au diviſeur 897, le chiffre 8 du diviſeur répondra aux deux chiffres 86, & ſera contenu 10 fois dans leur valeur avec un reſte. Mais on ne

peut jamais mettre qu'une figure à la fois dans le quotient : ainſi l'on ne prendra que 9 pour le nombre de fois que 8611 contient 897, & l'on écrira au quotient ce nombre 9 à la place des dixaines, c'eſt-à-dire à la droite des 50 centaines qui y ſont déjà.

Pour avoir le reſte de cette diviſion, on multipliera le diviſeur 897 par le nouveau quotient 9 ; & les chiffres du produit 8073, étant écrits ſous le dividende 8611 à meſure qu'on les aura trouvés, on retranchera ce produit du dividende qui ſera au-deſſus, & il reſtera 538 dixaines pour la diviſion ſuivante.

4°. Enfin l'on abaiſſera les deux unités du dividende à la droite de 538 dixaines qui reſtent de l'opération précédente, ce qui fera 5382 unités qu'il faudra diviſer par 897.

Dividende	4571112	897	*diviſeur*
	4485	5096	*quotient*
	8611		
	8073		
	5382		
	5382		
Dernier reſte	0000		

Comme le nouveau dividende 5382 a un chiffre de plus que le diviſeur 897, le chiffre 8 des centaines du diviſeur répondra aux 53 centaines du dividende, & y ſera contenu 6 fois avec un reſte ſuffiſant ; on écrira donc 6 au quotient à la place des unités, c'eſt-à-dire à la droite de 509 qui ſe trouve déjà écrit, & l'on aura 5096 pour le quotient de 4571112 diviſé par 897.

Pour ſavoir ſi cette derniere diviſion ne donne point de reſte, on multipliera le diviſeur 897 par le

dernier quotient 6 qu'on vient de trouver, & l'on écrira les chiffres du produit 5382, à meſure qu'on les trouvera, ſous les chiffres correſpondans du dividende 5382 : puis on retranchera ce produit du dividende ; & comme il ne reſtera rien, l'on ſera aſſuré que le dividende 4571112 eſt exactement diviſé par le diviſeur 897, & que 5096 eſt le quotient de cette diviſion.

Exemple III.

On propoſe de diviſer 239200 par 52.

Dividende	239200	52	*diviſeur*
	208	4	*quotient*
Premier reſte	31		

1°. Le dividende & le diviſeur étant diſpoſés comme il a été dit, & les deux chiffres qui compoſent le diviſeur 52 ne pouvant pas être contenus dans les deux premiers chiffres de la gauche du dividende ; on prendra dans le dividende les trois chiffres 239 pour les diviſer par 52, ſans faire aucune attention au reſte des chiffres du dividende qu'on réſerve pour les diviſions ſuivantes. Or en diviſant 239 par 52, on trouvera 4 pour le quotient, avec le reſte 31.

Dividende	239200	52	*diviſeur*
	208	46	*quotient*
	312		
	312		
	0		

2°. Ayant abaiſſé le chiffre 2 du dividende à la droite du reſte 31 de la diviſion précédente, on aura le nom-

bre 312 qui étant diviſé par 52, donnera 6 pour quotient ſans aucun reſte.

3°. Pour continuer la diviſion ſuivant les regles précédemment expliquées, il faudra abaiſſer ſucceſſivement les deux *zéros* du dividende ; mais comme chacun de ces *zéros* abaiſſé à la droite du reſte *zéro*, étant diviſé par 52, donnera *zéro* pour quotient ; il faudra placer deux *zéros* à la droite du quotient qu'on vient de trouver.

Dividende	239200	52	*diviſeur*
	208	4600	*quotient*
	312		
	312		
	000		

Ainſi le quotient total de la diviſion de 239200 par 52, ſera 4600.

PROBLÉME.

38 *Diviſer un nombre quelconque par un autre, lorſque le dividende ou le diviſeur contient des parties décimales, ou qu'ils en contiennent tous les deux.*

La regle générale pour diviſer des nombres qui contiennent des parties décimales, eſt de rendre les unités du dividende & celles du diviſeur de la même eſpece, en mettant après la virgule, ou après les décimales du terme qui a moins de chiffres décimaux que l'autre, autant de zéros qu'il en faut pour que le dividende & le diviſeur ayent le même nombre de caractéres après leurs virgules. Le dividende & le diviſeur étant ainſi préparés, on les diviſera l'un par

l'autre ſans faire aucune attention aux virgules qu'on pourroit ſupprimer, & que l'on ne conſerve que pour ne point changer les valeurs du dividende & du diviſeur.

Par exemple, ſi l'on veut diviſer (172, 8) par (1, 44) c'eſt-à-dire, 1728 *dixiémes* par 144 *centiémes*; comme le diviſeur a un chiffre décimal de plus que le dividende, on écrira un zéro à la droite du dividende. Ce dividende étant devenu (172, 80) qui ſignifie 17280 *centiémes*, aura des unités de même eſpece que celles du diviſeur (1, 44) qui ſignifie 144 *centiémes*.

Le dividende & le diviſeur ainſi préparés & devenus (172, 80) & (1, 44) n'auront point changé de valeur. Le quotient de (172, 80) diviſé par (1, 44) ſera donc le même que ſi l'on diviſoit (172, 8) par (1, 44).

Supprimons maintenant la virgule du dividende (172, 80) & celle du diviſeur (1, 44). Tous les chiffres du dividende & du diviſeur avanceront chacun de deux places, & deviendront par-là centuples de ce qu'ils étoient, c'eſt-à-dire qu'ils ſeront multipliés l'un & l'autre par 100. Le quotient ſera donc (*N°.* 33.) encore le même que ſi l'on diviſoit le dividende (172, 80) par (1, 44).

Donc, ſi l'on écrit à la droite du dividende ou du diviſeur autant de zéros qu'il en faut pour que ces deux termes ayent un même nombre de figures décimales, & qu'après avoir ſupprimé la virgule du dividende & celle du diviſeur, on diviſe le nouveau dividende par le nouveau diviſeur, on aura le quotient demandé.

Puiſque la diviſion des quantités qui contiennent des parties décimales par des quantités qui en contiennent auſſi, ſe réduit à la diviſion d'un dividende qui n'a point de déci-

Il eſt peut-être plus ſimple de démontrer le Problême & ſon exemple comme il ſuit.

Lorſqu'on ne fait point attention à la virgule du dividende (79, 58) & qu'on diviſe 7958 par le diviſeur propoſé 23; l'on diviſe un nombre centuple du dividende propoſé: ainſi le quotient qu'on trouve eſt centuple de celui qu'on doit trouver. Ce quotient doit donc être réduit à valoir cent fois moins; & c'eſt ce qu'on fait (*N°.* 3.) en y plaçant une virgule qui a deux chiffres à ſa droite.

PROBLÉME.

40 *Diviſer un nombre quelconque par un diviſeur qui n'a point de décimales, & pouſſer la diviſion juſqu'à ce que le quotient ne differe pas du vrai quotient qu'on doit trouver, d'une unité décimale de tel ordre qu'on voudra.*

Ayant placé une virgule à la droite du chiffre des unités ſimples du dividende propoſé; on mettra à la droite de cette virgule des zéros, juſqu'à ce que la place des décimales du dernier ordre de celles qu'on veut avoir au quotient ſoit remplie.

Le dividende étant ainſi préparé, on le diviſera par le diviſeur, comme s'il ne contenoit point de décimales; & l'on mettra enſuite dans le quotient une virgule qui en ſéparera autant de décimales qu'il y en aura dans le dividende préparé.

EXEMPLE.

On propoſe de diviſer (103, 2) *par* 33, *& de trouver un quotient qui ne differe pas d'un* milliéme *du quotient exact qu'on trouveroit, ſi la diviſion pouvoit ſe faire ſans reſte.*

Comme le dividende propoſé ne contient en décimales, que des *dixiémes*, on écrira de ſuite à ſa droite

deux zéros pour remplir la place des *centiémes* & des *milliémes*; parce que l'erreur du quotient devant être moindre que 1 *milliéme*, la diviſion doit être pouſſée juſqu'aux *milliémes*.

Le dividende ainſi préparé, l'on aura (103, 200) à diviſer par 33; & faiſant la diviſion comme il a été dit dans le Problême précédent, en ne conſidérant point la virgule du dividende; on trouvera le quotient 3127 qui ne doit repréſenter que des *milliémes*; puiſque l'on a diviſé des *milliémes*: ainſi ce quotient doit être (3, 127).

Dividende 103, 200 { 33 *diviſeur*
99 { 3, 127 *quotient*

42
33
90
66
240
231
9

Comme il n'étoit pas poſſible de mettre une unité de plus dans le quotient 3127, ſans le rendre trop grand; & que cette unité ne ſeroit que 1 *milliéme*; il eſt évident que le quotient (3, 127) qu'on trouve, quoiqu'il ne ſoit pas exact, ne differe pas du vrai quotient de la milliéme partie d'une unité.

PROBLÉME.

41 *Diviſer un nombre quelconque par un diviſeur plus grand que le dividende, & pouſſer la diviſion juſqu'à ce que le quotient ne differe pas du quotient exact, d'une unité décimale de tel ordre qu'on voudra.*

Si le diviſeur n'a point de parties décimales, on écrira à la droite du dividende, autant de zéros qu'il en faudra pour que la place des décimales du dernier ordre de celles qu'on veut avoir au quotient, ſoit remplie.

Mais ſi le diviſeur contient des parties décimales, on ſupprimera ſa virgule, & l'on reculera celle du dividende vers la droite, d'autant de places qu'il y avoit de chiffres décimaux dans le diviſeur : enſuite on écrira à la droite du dividende autant de zéros qu'il en faudra pour qu'il y ait à la droite de la nouvelle virgule autant de décimales qu'on veut en avoir au quotient.

Le dividende & le diviſeur étant ainſi préparés, on les diviſera l'un par l'autre, comme s'ils n'avoient point de décimales.

Comme le quotient doit avoir autant de décimales que le dividende ; & qu'il pourra arriver que ce quotient aura moins de figures que le dividende n'aura de décimales ; l'on ſera obligé, dans ce cas, de mettre aſſez de zéros à la gauche du quotient qu'on trouvera, pour qu'il ait autant de figures décimales qu'il y en aura dans le dividende préparé ; & ayant placé une virgule à la gauche de ces zéros qui completeront le nombre des figures décimales du quotient, l'on mettra encore à la gauche de cette virgule un nouveau zéro, pour tenir la place des unités.

Exemple premier.

On propoſe de diviſer le nombre 2 par 189, & de pouſſer

la diviſion juſqu'à ce que le quotient ne differe pas du quotient exact de la cent-milliéme *partie d'une unité.*

Ayant placé une virgule à la droite du nombre 2 qu'on doit diviſer, l'on écrira cinq zéros à la droite de cette virgule, afin que la place des *cent-milliémes* ſoit occupée; & l'on aura (2, 00000) à diviſer par le diviſeur 189.

Dividende	2,00000	189	*diviſeur*
	1 89	0,01058	*quotient*
	1100		
	945		
	1550		
	1512		
Reſte	38		

Le dividende étant ainſi préparé ſans toucher au diviſeur 189, parce qu'il ne contient point de décimales; on diviſera le dividende (2, 00000) par 189, comme ſi ce dividende ne contenoit point de décimales, & l'on trouvera 1058 pour le quotient. Mais comme on n'avoit que des *cent-milliémes* à diviſer par 189, le quotient 1058 n'aura pour unités que des *cent-milliémes*: ainſi il faudra que ſon chiffre 8 de la droite tienne le rang des *cent-milliémes*, & ſoit par conſéquent à la cinquiéme place à la droite de ſa virgule. On mettra donc un zéro à la gauche du quotient 1058, avec une virgule à la gauche de ce zéro; afin que ce quotient ait cinq figures décimales comme le dividende. Enfin l'on mettra encore un zéro à la gauche de la virgule pour tenir la place des unités, & l'on aura (0, 01058) pour le quotient de 2 diviſé par 189. En opérant ainſi, la diviſion ſera pouſſée juſqu'à ce que le quotient ne differe pas du quotient exact de 1 *cent-milliéme*.

EXEMPLE II.

On propoſe de diviſer (0,025) *par* (1,89) *& de pouſſer la diviſion juſqu'à ce que le quotient ne differe pas du quotient exact d'un* millioniéme.

Supprimant la virgule du diviſeur, on reculera de deux places vers la droite la virgule du dividende, parce qu'il n'y a que deux chiffres décimaux au diviſeur. Le dividende & le diviſeur ſeront ainſi multipliés par 100 (*N°.* 3.) & le quotient ne changera point de valeur (*N°.* 33.). La diviſion ſera donc réduite à celle de (002,5) ou (2,5) par 189.

Comme il faut pouſſer la diviſion juſqu'aux *millioniémes* qui ſont des décimales du ſixiéme ordre, leſquelles doivent occuper la ſixiéme place à la droite de la virgule, & que le dividende (2,5) a déjà une décimale à la droite de ſa virgule; on écrira encore cinq zéros à la droite de ce dividende, pour lui donner ſix chiffres décimaux; & l'on aura

Nouveau dividende 2,500000 { 189 *N. diviſeur*
0,013227 *quotient*

1 89	
610	
567	
430	
378	
520	
378	
1420	
1323	
Reſte	97

La diviſion étant faite, on aura 13227 pour le quotient: & comme on a diviſé des *millioniémes*, ce quotient

quotient comptera des *millioniémes* ; ainſi ſa derniere figure 7 doit être la ſixiéme à la droite de la virgule. On mettra donc un zéro à la gauche de ce quotient, avec une virgule à la gauche de ce zéro, & encore un nouveau zéro à la gauche de la virgule pour tenir la place des unités ; enſorte que l'on aura (0, 013227) pour le quotient de (2, 500000) diviſé par 189, ou pour celui de (0, 025) diviſé par (1, 89).

Comme le dividende (2, 500000) qui ſignifie 2500000 *millioniémes*, n'eſt pas exactement diviſible par 189 ; on trouve après la diviſion 97 *millioniémes* de reſte, qui ne peuvent plus être diviſés par 189, à moins qu'on ne veuille avoir au quotient des décimales inférieures aux *millioniémes*.

Si l'on avoit voulu pouſſer la diviſion juſqu'aux *cent-millioniémes* qui ſont des décimales du huitiéme ordre, il auroit fallu mettre encore deux zéros à la droite du dividende ; c'eſt-à-dire qu'il auroit fallu diviſer (2, 50000000) par 189 : & l'on auroit eu pour le quotient 1322751 *cent-millioniémes* ou (0, 01322751) avec un reſte 61 *cent-millioniémes*.

Enfin ſi l'on vouloit pouſſer la diviſion à l'infini, on auroit (0, 01 322751 322751 322751 *&c.*) pour le quotient ; c'eſt-à-dire qu'après (0, 01) l'on répéteroit continuellement les mêmes chiffres 322751.

Avertiſſement.

Outre la méthode qu'on vient d'expliquer pour la diviſion, & que les Arithméticiens appellent *Méthode Italienne*, il y en a trois autres principales dont l'uſage paroît plus ordinaire, quoiqu'on ſoit plus expoſé à y faire des erreurs, à cauſe de la plus grande attention qu'il y faut apporter, & qu'il ſoit plus difficile d'y trouver les fautes qu'on a faites en opérant, & de les

corriger. Ces trois Méthodes que nous allons expliquer ſuccinctement pour en donner une idée, ſont la *Méthode Italienne abrégée*, l'*Eſpagnole* & la *Françoiſe*.

DE LA MÉTHODE ITALIENNE ABRÉGÉE.

42 La Méthode Italienne abrégée ne differe de celle qu'on vient d'expliquer, qu'en ce que pour rendre les opérations plus courtes, l'on n'écrit point les produits de la multiplication du diviſeur par les chiffres du quotient, & qu'on retranche du dividende les chiffres de ces produits à meſure qu'on les trouve. Un exemple ſuffira pour expliquer cette Méthode, & pour faire voir en quoi elle differe de la Méthode Italienne.

Dividende 7958 { 23 *diviſeur*
105 { 346 *quotient*
138
000

On écrira comme on a toûjours fait le diviſeur à la droite du dividende, & commençant la diviſion par celle des chiffres de la plus haute dénomination; l'on diviſera d'abord 79 centaines par le diviſeur 23, ce qui donnera 3 centaines pour le quotient; ainſi l'on écrira 3 au quotient, dans une place qui ſera celle des centaines.

Pour avoir le reſte de cette premiere diviſion particuliere des centaines; on multipliera le diviſeur 23 par le quotient 3, & le produit ſera retranché du dividende actuel 79; mais l'on n'écrira point ce produit, comme nous avons fait dans la méthode précédente, & l'on ſe contentera de retrancher de 79 centaines les chiffres de ce produit à meſure qu'on les trouvera. On

dira donc : 3 fois 3 font 9 ; & comme en retranchant ce produit 9 du chiffre 9 du dividende, il ne reſtera rien, l'on écrira un zéro au-deſſous du 9. Enſuite on dira : 3 fois 2 font 6 qu'on retranchera du chiffre 7 du dividende ; & comme il reſtera 1, l'on écrira 1 au-deſſous du 7. Ainſi en diviſant 79 centaines par 23, l'on aura 3 centaines pour le quotient, avec 10 centaines de reſte, qui n'ont pas pû être diviſées par 23.

Pour continuer la diviſion, l'on abaiſſera les 5 dixaines du dividende à la droite des 10 centaines reſtantes de la premiere diviſion : & ayant 105 dixaines à diviſer par 23, le quotient ſera 4 dixaines qu'il faudra écrire à la droite des 3 centaines que l'on a déjà. Puis pour avoir le reſte de cette ſeconde diviſion des dixaines, l'on multipliera 23 par 4, & à meſure qu'on trouvera les chiffres du produit, on les retranchera du dividende 105 ſur lequel on opere. L'on dira donc : 4 fois 3 font 12 qu'on propoſera de retrancher de 5 ; & comme cela eſt impoſſible, on empruntera 1 dixaine ou une unité d'un degré ſupérieur, qui étant ajoûtée à 5 fera 15 ; & retranchant 12 de 15, il reſtera 3 qu'on écrira ſous le 5. Enſuite on dira : 4 fois 2 font 8, & 1 que l'on a emprunté & qu'il faut retrancher font 9 ; & retranchant 9 de 10, il reſtera 1 qu'on écrira au-deſſous ; de ſorte que le reſte de cette ſeconde diviſion ſera 13.

Pour achever la diviſion, l'on abaiſſera les 8 unités du dividende à la droite des 13 dixaines reſtantes de la diviſion précédente, & l'on aura 138 unités à diviſer par 23 ; ce qui donnera pour le quotient 6 unités que l'on écrira à la droite des deux chiffres 34 qui y ſont déjà placés. Puis pour avoir le reſte de la diviſion, l'on multipliera le diviſeur 23 par 6 ; & à meſure qu'on trouvera les chiffres du produit, on les retranchera du dividende actuel 138. Pour cela l'on dira : 6 fois 3 font 18 qu'on propoſera de retrancher de 8 ; & comme

cela ne ſe peut pas, on empruntera 1 dixaine ou une unité du degré ſupérieur, qui jointe à 8 fera 18 : & retranchant 18 de 18, il ne reſtera rien ; ainſi l'on écrira 0 ſous le 8. Enſuite on dira : 6 fois 2 font 12, & l'unité empruntée qu'il faut retrancher, font 13 ; ainſi l'on retranchera 13 de 13, & comme il ne reſtera rien, l'on écrira 0 au-deſſous.

La diviſion étant faite, on trouvera 346 pour le quotient exact de 7958 diviſé par 23.

Cette Méthode eſt un peu plus courte que celle qu'on a précédemment expliquée ; mais elle expoſe plus que la premiere à tomber dans l'erreur ; parce qu'il faut ſe ſouvenir de ce qu'on a emprunté, pour le joindre avec le produit ſuivant ; & qu'il y a deux opérations entre l'emprunt & le compte que l'on en tient.

De la Méthode Espagnole.

43 La Méthode Eſpagnole eſt aſſez ſemblable à la Méthode Italienne abrégée : elle en differe cependant, en ce que l'on écrit le diviſeur au-deſſous du dividende dans chaque diviſion particuliere. Un exemple ſuffira pour la faire connoître.

	10		
On propoſe de diviſer	7958	(3	*quotient*
Par	23		

On prendra autant de chiffres de la gauche du dividende, qu'il en faudra pour que le diviſeur y puiſſe être contenu ; & comme dans l'exemple propoſé les deux chiffres 79 du dividende contiennent le diviſeur 23, on ſe propoſera de diviſer ſeulement 79 par 23.

Ayant écrit 23 ſous 79, on cherchera combien de fois 23 eſt contenu dans 79, ou combien de fois 2 eſt

contenu dans 7 ; & comme on trouvera qu'il y eſt contenu 3 fois, on écrira 3 au quotient.

Pour connoître le reſte de cette premiere diviſion, l'on multipliera le diviſeur 23 par le quotient 3 ; & à meſure qu'on trouvera les chiffres du produit, on les ſouſtraira des chiffres ſupérieurs, en écrivant les reſtes au-deſſus de ces chiffres ſupérieurs. On dira donc : 3 fois 3 font 9 qu'on ôtera du 9 ſupérieur ; & comme il ne reſtera rien, l'on écrira un zéro au-deſſus de ce 9 que l'on barrera, auſſi-bien que le chiffre 3 multiplié. Enſuite on dira : 3 fois 2 font 6 que l'on ſouſtraira du chiffre ſupérieur 7, & il reſtera 1 que l'on écrira au-deſſus du 7, en barrant ce 7 & le chiffre 2 multiplié.

Par cette premiere opération, les 79 centaines du dividende ſeront diviſées par 23 ; le quotient ſera 3 centaines, & il reſtera 10 centaines qui n'ont pas pû être diviſées par 23.

Pour continuer la diviſion, l'on prendra les 5 dixaines du dividende avec les 10 centaines reſtantes de la premiere diviſion ; & l'on aura 105 dixaines à diviſer par 23.

	1		
	~~7~~ ~~9~~ 3		
Dividende	~~7~~ ~~9~~ ~~5~~ 8	(34	*quotient*
	~~2~~ 3 ~~3~~		
	~~2~~		

Pour faire cette diviſion ; l'on écrira de nouveau le diviſeur 23 au-deſſous du dividende 105 dixaines, de maniere que le 3 ſoit ſous le 5, & le 2 ſous le zéro ; c'eſt-à-dire que l'on reculera les chiffres du diviſeur d'un rang vers la droite. Puis on cherchera combien de fois 23 eſt contenu dans 105 ; & ayant trouvé qu'il y eſt 4 fois, l'on écrira 4 au quotient à la droite du chiffre 3 premierement trouvé.

Pour avoir le reſte de cette ſeconde diviſion, l'on dira : 4 fois 3 font 12 ; & comme ce premier produit particulier ne peut pas être retranché du chiffre ſupérieur 5, on empruntera 1 dixaine laquelle jointe à 5 fera 15 dont on ôtera 12, & il reſtera 3 que l'on écrira au-deſſus de 5, après avoir barré ce 5 & le 3 multiplié. Puis on dira : 4 fois 2 font 8, & 1 que l'on a emprunté font 9 que l'on retranchera de 10, & il reſtera 1 que l'on écrira au-deſſus du zéro, après avoir barré 10 & le 2 multiplié.

Par cette ſeconde opération, les 105 dixaines ſeront diviſées par 23 ; le quotient ſera 4 dixaines, & il reſtera encore 13 dixaines qui n'ont pas pû être diviſées par 23.

Pour achever la diviſion propoſée, l'on joindra les 13 dixaines reſtantes avec les 8 unités ; & l'on aura 138 unités à diviſer par 23.

Dividende 7958 (346 *quotient*

Pour faire cette derniere diviſion, l'on écrira comme on a déjà fait, le diviſeur 23 au-deſſous du nouveau dividende 138, en reculant ſes chiffres d'un rang vers la droite, enſorte que le 3 ſoit ſous le 8. Puis ayant trouvé que 23 eſt 6 fois dans 138, & ayant écrit 6 au quotient à la droite de 34 ; l'on multipliera le diviſeur 23 par 6 ; & à meſure qu'on fera le produit d'un chiffre du diviſeur par 6, on le retranchera du chiffre ſupérieur, comme dans les deux opérations précédentes. Les produits particuliers qui compoſent celui de 23 par 6, étant ôtés de 138, il ne reſtera rien. Ainſi 346 ſera le quotient exact de 7958 diviſé par 23.

Cette Méthode a le même inconvenient que la précédente ; & comme elle a de plus un embarras de chiffres diſpoſés pyramidalement, il eſt difficile d'y reconnoître & de corriger les fautes qu'on peut avoir faites.

De la Méthode Françoise.

44 La Méthode Françoiſe reſſemble à la Méthode Eſpagnole, par la diſpoſition du dividende & du diviſeur, & par la façon d'écrire les reſtes des diviſions particulieres au-deſſus du dividende ; mais elle en differe en ce que l'on n'emprunte point. Un exemple ſuffira pour faire connoître cette Méthode.

	5		
	127		
On propoſe de diviſer	84162	(8	*quotient*
Par	98		

Comme le diviſeur 98 n'eſt pas contenu dans les deux chiffres 84 de la gauche du dividende, on ſe propoſera d'abord de diviſer les trois chiffres 841 de la gauche du dividende, c'eſt-à-dire 841 centaines par 98. Pour cela l'on écrira le diviſeur 98 au-deſſous de 41, & cherchant combien de fois 98 eſt contenu dans 841, l'on trouvera qu'il y eſt 8 fois : ainſi l'on écrira 8 au quotient dans une place qui ſera celle des centaines, puiſque l'on diviſe des centaines.

Pour avoir le reſte de cette premiere diviſion, l'on multipliera ſucceſſivement les deux chiffres de 98 par 8, en commençant par le chiffre 9 du plus haut degré ; & à meſure qu'on trouvera les produits, on les ôtera des chiffres ſupérieurs. On dira donc : 8 fois 9 font 72 qu'on retranchera de 84, en ôtant le 2 du 4 & le 7 du 8 ; & il reſtera 12 qu'on écrira au-deſſus, après avoir barré 84 & le chiffre 9 qu'on vient de

multiplier. Enſuite on dira : 8 fois 8 ſont 64 que l'on retranchera de 121 ; & il reſtera 57 qu'on écrira au-deſſus, après avoir barré 121 & le chiffre 8 qu'on vient de multiplier.

Par cette premiere opération, les 841 centaines ſeront diviſées par 98 ; le quotient ſera 8, & il reſtera 57 centaines qui n'ont pas pû être diviſées par 98.

Pour continuer la diviſion, l'on reculera le diviſeur 98 d'un rang, en l'écrivant au-deſſous de 76, afin de diviſer les 57 centaines reſtantes avec les 6 dixaines, c'eſt-à-dire afin de diviſer 576 dixaines par 98.

	98		
	57		
	576		
Dividende	84162	(85	*quotient*
	988		
	9		

Le diviſeur 98 étant contenu 5 fois dans le dividende actuel 576, & ayant écrit 5 au quotient à la droite du 8 qu'on y a déjà placé ; l'on multipliera 98 par 5, en commençant par le chiffre du plus haut degré ; & à meſure qu'on fera le produit d'un chiffre par 5, on le retranchera des chiffres ſupérieurs. L'on dira donc : 5 fois 9 ſont 45 qu'on retranchera de 57 ; & il reſtera 12 qu'on écrira au-deſſus de 57, après avoir barré 57 & le chiffre 9 multiplié. Enſuite on dira : 5 fois 8 ſont 40 qu'on retranchera de 126 ; & il reſtera 86 qu'on écrira au-deſſus de 126, ou plûtôt au-deſſus de 26, après avoir barré 126 & le chiffre 8 multiplié.

Par cette ſeconde opération, le nombre 576 dixaines ſera diviſé par 98 ; le quotient ſera 5 dixaines, & il reſtera 86 dixaines qui n'ont pas pû être diviſées par 98.

Pour finir la diviſion propoſée, l'on reculera encore le diviſeur d'un rang, afin de diviſer les 86 dixaines reſtantes avec les deux unités, c'eſt-à-dire afin de diviſer 862 unités par 98.

Dividende 84262 (858 *quotient*

Ayant trouvé que 98 eſt contenu 8 fois dans le dividende actuel 862, & ayant écrit 8 au quotient à la droite de 85 ; l'on cherchera le reſte de cette diviſion, en diſant comme ci-devant : 8 fois 9 font 72, qu'on retranchera des chiffres ſupérieurs 86 ; & il reſtera 14 que l'on écrira au-deſſus de ces chiffres, après avoir barré 86 & le chiffre 9 qu'on vient de multiplier. Puis on dira : 8 fois 8 font 64, qu'on retranchera de 142 ; & il reſtera 78 unités qu'on écrira au-deſſus de 42.

Par cette derniere opération, les 862 unités ſeront diviſées par 98 ; le quotient ſera 8 unités, & il reſtera 78 unités qui ne peuvent point être diviſées par le diviſeur 98.

Le quotient de 84162 diviſé par 98 ſera donc 858, & il reſtera 78 unités qu'on ne peut plus diviſer par 98, à moins qu'on ne les transforme en d'autres unités plus petites ; mais ce n'eſt point ici le lieu de parler des unités plus petites que les unités ſimples.

Cette derniere Méthode a cela d'avantageux, qu'on n'eſt point obligé d'emprunter ; mais d'un autre côté, elle a cela d'incommode, qu'il faut ſavoir retrancher un nombre exprimé par deux chiffres, d'un autre nombre exprimé par deux

ou trois chiffres. D'ailleurs elle a le même inconvenient que la Méthode précédente, en ce que les reſtes des diviſions étant diſpoſés pyramidalement au-deſſus du dividende, il eſt difficile de reconnoître les endroits où l'on peut avoir fait quelque erreur, & de les corriger.

Des Suites décimales compoſées de Périodes égales qui ſe ſuccédent à l'infini.

45 Lorſqu'on veut avoir le quotient d'une diviſion en parties décimales, & qu'on pouſſe le calcul aſſez loin, après avoir trouvé un certain nombre de chiffres pour le quotient, on parvient à retrouver les mêmes chiffres pour la ſuite de ce quotient. En voici des exemples.

1°. Si l'on diviſe 1 par 3, on trouvera pour le quotient (0, 3333 *&c*); c'eſt-à-dire que le quotient ſera compoſé de trois *dixiémes*, trois *centiémes*, trois *milliémes*, & toûjours ainſi de ſuite juſqu'à l'infini.

2°. Si l'on diviſe 1 par 6, on trouvera pour quotient (0, 16666 *&c*); c'eſt-à-dire que le premier chiffre du quotient ſera 1 *dixiéme*, & que tous les autres chiffres décimaux ſeront des 6.

3°. Si l'on veut diviſer 1 par 7, on trouvera pour le quotient (0, 142857 142857 *&c*); c'eſt-à-dire qu'après avoir trouvé 142857 pour les ſix premiers chiffres décimaux du quotient, on trouvera les mêmes chiffres 142857 pour les ſix chiffres ſuivans, & toûjours la même choſe à l'infini.

4°. Si l'on diviſe 1 par 9, on trouvera pour le quotient (0, 1111 *&c*); c'eſt-à-dire que tous les chiffres décimaux ſeront des unités.

5°. Si l'on diviſe 1 par 24, l'on trouvera pour le quotient (0, 041666 *&c*); c'eſt-à-dire que les trois premiers chiffres décimaux ſeront 041 qui ſignifient

41 *milliémes*, & que tous les chiffres décimaux ſuivans à l'infini ſeront des 6.

Lorſque les mêmes chiffres reviennent ainſi dans un quotient, l'on n'écrit que deux périodes de chiffres ſemblables, & l'on met enſuite *&c* pour marquer que ces périodes reviendront toûjours à l'infini.

THÉORÊME.

46 1°. *Tout dividende moindre que 9, qui ſera diviſé par 9, donnera pour le quotient une ſuite infinie de chiffres décimaux égaux à celui du dividende.*

2°. *Tout dividende moindre que 99, qui ſera diviſé par 99, donnera pour le quotient une ſuite infinie de périodes décimales de deux figures égales à celles du dividende.*

3°. *Tout dividende moindre que 999, qui ſera diviſé par 999, donnera pour le quotient une ſuite infinie de périodes décimales de trois figures égales à celles du dividende.*

Il en ſera de même de tous les diviſeurs qui ſeront d'une unité moindres que les termes de la progreſſion décuple, 10, 100, 1000, 10000, 100000, *&c*, *& qui diviſeront des nombres plus petits qu'eux-mêmes.*

DÉMONSTRATION.

1°. Tout nombre moindre que 9 ne pouvant pas être diviſé par 9, doit être réduit en *dixiémes*, & vaudra autant de dixaines de *dixiémes* qu'il aura d'unités, Or chaque dixaine de *dixiémes* donnera 1 *dixiéme* pour le quotient, & il reſtera 1 *dixiéme*. Donc toutes les dixaines de *dixiémes* qui compoſeront la valeur du dividende, donneront autant de *dixiémes* au quotient & au reſte, que le dividende aura d'unités; & par conſéquent le premier chiffre décimal du quotient, & le premier chiffre décimal reſtant, ſeront les mêmes que celui du dividende qu'on ſuppoſe moindre que 9.

Le chiffre reſtant de la premiere diviſion étant égal à celui du dividende, & devant être diviſé par 9, ſera réduit en *centiémes*, & donnera par les mêmes raiſons autant de *centiémes* au quotient & au reſte, que le dividende aura d'unités; & toûjours de même à l'infini.

Par exemple, ſi l'on diviſe 7 par 9, l'on fera du dividende 7, 7 dixaines de *dixiémes*. Or chaque dixaine de *dixiémes* étant diviſée par 9, donnera 1 *dixiéme* pour le quotient, & il reſtera 1 *dixiéme*. Donc les 7 dixaines de *dixiémes* étant diviſées par 9, donneront 7 *dixiémes* pour le quotient, & donneront auſſi 7 *dixiémes* pour le reſte.

Ces 7 *dixiémes* reſtans de la premiere diviſion ne pouvant pas être diviſés par 9, l'on en fera 7 dixaines de *centiémes*; & comme chaque dixaine de *centiémes*, étant diviſée par 9, donnera 1 *centiéme* pour le quotient & 1 *centiéme* de reſte, les 7 dixaines de *centiémes* donneront 7 *centiémes* pour le quotient & 7 *centiémes* de reſte. Il en ſera de même des *milliémes* &c; c'eſt-à-dire que chaque chiffre décimal du quotient ſera le même que le chiffre du dividende.

2°. Tout nombre moindre que 99, ne pouvant point être diviſé par 99, ſera réduit en autant de centaines de *centiémes* qu'il a d'unités. Or chaque centaine de *centiémes* étant diviſée par 99, donnera 1 *centiéme* pour le quotient, & il reſtera 1 *centiéme*. Donc toutes les unités du dividende donneront pour le quotient un nombre de *centiémes* exprimé par les mêmes chiffres que le dividende, & il reſtera le même nombre de *centiémes*. Il en ſera de même des autres chiffres du quotient.

Par exemple, ſi l'on veut diviſer 42 par 99, on fera 42 centaines de *centiémes* du dividende 42; & chaque centaine de *centiémes* diviſée par 99, donnant 1 *cen-*

tiéme pour le quotient & 1 *centiéme* de reſte; les 42 centaines de *centiémes* donneront 42 *centiémes* pour le quotient, avec 42 *centiémes* de reſte. Ainſi le nombre des *centiémes* du quotient, & le nombre des *centiémes* du reſte, ſeront exprimés par les mêmes chiffres que le dividende 42.

Les 42 *centiémes* reſtans ne pouvant plus être diviſés par 99, l'on en fera 42 centaines de *centiémes de centiémes*, c'eſt-à-dire 42 centaines de *dix-milliémes*; mais chaque centaine de *dix-milliémes*, étant diviſée par 99, donnera 1 *dix-milliéme* pour le quotient avec 1 *dix-milliéme* de reſte: ainſi les 42 centaines de *dix-milliémes*, donneront 42 *dix-milliémes* pour le quotient, avec 42 *dix-milliémes* de reſte. Donc le nombre des *dix-milliémes* du quotient, & le nombre des *dix-milliémes* du reſte, ſeront exprimés par les mêmes chiffres 42 que le dividende.

En ſuivant le même raiſonnement, l'on fera voir que tous les autres chiffres du quotient ſeront égaux deux à deux à ceux du dividende qu'on ſuppoſe moindre que 99. Ainſi en diviſant 42 par 99, on aura pour quotient (0, 424242 *&c*).

Si le nombre à diviſer par 99 étoit exprimé par un ſeul chiffre, par exemple, ſi l'on avoit 5 ou 05, à diviſer par 99; on changeroit 5 en 500 *centiémes* qu'on diviſeroit par 99, & l'on auroit pour le quotient (0,05) c'eſt-à-dire 5 *centiémes* avec (0, 05) de reſte; puis on transformeroit ce reſte en 500 *dix-milliémes* qu'on diviſeroit par 99, & l'on auroit 5 *dix-milliémes* ou (0, 0005) avec 5 *dix-milliémes* ou (0, 0005) de reſte; en ſorte que le quotient ſeroit compoſé de périodes décimales ſemblables, qui toutes auroient les deux caracteres 05 égaux à ceux du dividende; c'eſt-à-dire que 5 ou 05, étant diviſé par 99, donneroit pour le quotient (0, 050505 *&c*).

Enfin toutes les fois qu'on diviſera un nombre quelconque par un nombre plus grand que lui, dont tous les chiffres ſeront des 9, on aura pour le quotient une ſuite infinie de périodes décimales compoſées d'autant de caracteres que le diviſeur aura de chiffres; & chacune de ces périodes aura les mêmes chiffres ſignificatifs que le dividende; enſorte que ſi le dividende avoit moins de chiffres que le diviſeur, il ſe trouveroit dans chaque période des places remplies par des zéros écrits à la gauche du chiffre ou des chiffres ſignificatifs égaux à ceux du dividende.

Corollaire premier.

47 Et réciproquement, ſi l'on a une ſuite infinie de périodes décimales compoſées des mêmes chiffres, la ſomme de cette ſuite ſera égale au quotient d'une période diviſée par un nombre compoſé d'autant de 9 qu'il y aura de figures dans la période.

Par exemple, la ſuite (0, 333 &c) dont chaque période n'a qu'un chiffre 3, eſt égale au quotient de la diviſion de 3 par 9 ou de 1 par 3.

La ſuite (0, 232323 &c) dont chaque période (23) a deux chiffres, eſt le quotient de la diviſion de 23 par 99.

La ſuite (0, 087087087 &c) dont chaque période (087) a trois figures, eſt le quotient de la diviſion de 087 ou de 87 par 999.

La ſuite (0, 001001001 &c) dont chaque période (001) a trois figures, eſt le quotient de la diviſion de 001 ou de 1 par 999 : & ainſi des autres.

Corollaire II.

48 A meſure qu'on avance la virgule d'une place vers la gauche, les chiffres décimaux qu'on avoit

valent dix fois moins qu'ils ne valoient. Par exemple ſi l'on a une ſuite (0, 298298 &c), & qu'on avance la virgule d'un rang vers la gauche, on aura (0, 0298298 &c) qui vaudra dix fois moins que (0, 298298 &c). Si l'on avance encore la virgule d'un rang vers la gauche, on aura (0, 00298298 &c) qui vaudra dix fois moins que (0, 0298298 &c), ou cent fois moins que (0, 298298 &c) : & ainſi des autres.

Mais la ſuite (0, 298298 &c) compoſée de périodes égales, dont la premiere commence immédiatement après la virgule, eſt le quotient de la diviſion de 298 par 999.

Donc cette ſuite (0, 0298298298 &c) qui vaut dix fois moins que la premiere, eſt le quotient de la diviſion de 298 par 9990; & la ſuite (0, 00298298 &c) qui vaut cent fois moins que la premiere, eſt le quotient de la diviſion de 298 par 99900 : & ainſi des autres; c'eſt-à-dire que quand une ſuite de périodes décimales ne commence pas préciſément après la virgule, elle repréſente le quotient d'une diviſion dont le dividende eſt égal à une période, & dont le diviſeur eſt compoſé, non ſeulement d'autant de 9 que la période a de chiffres, mais encore d'autant de zéros qu'il y a de places entre la virgule & le premier chiffre de la premiere période.

Comme nous traiterons plus généralement la même matiere dans le Chapitre III du VIII Livre, & que nous ne pouvons pas nous diſpenſer de parler encore des parties décimales dans le Livre des fractions, nous n'en dirons pas davantage pour le préſent, & nous réſerverons la réduction des ſuites infinies de périodes décimales en fractions finies, pour en traiter lorſque nous expliquerons les opérations de l'Arithmétique ſur les fractions.

DE LA PREUVE

DE LA MULTIPLICATION ET DE LA DIVISION.

LA multiplication & la diviſion ſe ſervent mutuellement de preuve; c'eſt-à-dire que l'on connoît par la diviſion s'il n'y a point de fautes dans la multiplication, & que l'on trouve par la multiplication ſi l'on n'a point commis d'erreurs dans la diviſion.

Preuve de la Multiplication.

49 En diviſant un nombre par un autre, l'on trouve un troiſiéme nombre nommé *quotient* lequel multiplié par le ſecond donne un produit égal au premier nombre : ainſi en diviſant le produit d'une multiplication par ſon multiplicande, l'on doit trouver pour le quotient, un nombre égal au multiplicateur : ou bien en diviſant le produit par le multiplicateur, on doit avoir un quotient égal au multiplicande; puiſque de la multiplication du multiplicande & de ce quotient, il doit réſulter un nombre égal au produit qu'on a diviſé.

Nous propoſerons donc pour preuve de la multiplication, de diviſer le produit par le multiplicande, ou par le multiplicateur; & ſi le quotient que l'on trouve eſt égal au multiplicateur ou au multiplicande, ce ſera une marque que la multiplication a été bien faite : ſinon la multiplication ſera réputée mal faite, & il faudra la recommencer.

Par exemple, ſi après avoir multiplié 964 par 264, on trouve que le produit eſt 254496, l'on diviſera ce produit 254496 par le multiplicande 964; & comme le

le quotient qu'on trouvera ſera égal au multiplicateur 264, la multiplication ſera réputée bonne : ou bien l'on diviſera le produit 254496 par le multiplicateur 264; & comme on trouvera pour le quotient un nombre égal au multiplicande 964, on en conclurra que la multiplication a été bien faite.

Lorſqu'un multiplicateur eſt compoſé de pluſieurs chiffres, l'on eſt obligé de multiplier le multiplicande par chacun des chiffres particuliers du multiplicateur; ce qui donne autant de produits particuliers qu'il y a de chiffres dans le multiplicande : enſuite en ajoûtant enſemble tous ces produits particuliers, on trouve un total qui eſt le produit de la multiplication.

Pour faire la preuve de la multiplication, l'on peut attendre que le produit total ſoit trouvé, & diviſer ce produit total par le multiplicande ou par le multiplicateur, comme nous l'avons dit. Mais il eſt plus à propos d'examiner chaque produit particulier, en le diviſant par le chiffre du multiplicateur qui a multiplié le multiplicande; parce que ſi le quotient ſe trouve égal au multiplicande, ce ſera une marque que ce produit particulier eſt bon; & ſi le quotient n'eſt pas égal au multiplicande, on ſera sûr qu'il y a une faute dans ce produit, & l'on ne ſera pas obligé de la chercher ailleurs. Par exemple,

En multipliant	964
Par	264
Le multiplicande multiplié par 4 donne	3856
Le multiplicande multiplié par 6 donne	5784
Le multiplicande multiplié par 2 donne	1928
Ces trois produits particuliers donnent enſemble	254496

Or ſans attendre qu'on ait trouvé le produit total 254496 de la multiplication, pour en faire la preuve;

on peut éprouver par la diviſion les produits particuliers à meſure qu'on les a trouvés.

Comme le premier produit particulier 3856 réſulte de la multiplication de 964 par le ſeul chiffre 4, on diviſera ce produit par 4; c'eſt-à-dire qu'on en prendra le quart, en diſant: le quart de 38 centaines eſt 9 centaines qui ſe trouvent au multiplicande; mais comme 9 eſt le quart de 36, il reſtera 2 centaines qui vaudront 20 dixaines leſquelles étant jointes à 5 dixaines feront 25 dixaines dont le quart eſt 6 dixaines qui ſe trouvent au multiplicande; enfin comme 6 eſt le quart de 24 & non pas de 25, il reſtera 1 dixaine que l'on convertira en 10 unités & que l'on joindra avec le 6, ce qui fera 16 dont le quart eſt juſtement 4 unités qui ſe trouvent au multiplicande. Comme ce premier produit 3856 donne exactement pour le quotient les mêmes chiffres que ceux du multiplicande, c'eſt une preuve que ce premier produit 3856 eſt bon.

Le ſecond produit particulier 5784 venant de la multiplication de 964 par 6, on le diviſera par 6, & l'on trouvera pour le quotient les mêmes chiffres que ceux du multiplicande; ce qui prouvera que ce ſecond produit eſt bon.

Enfin le troiſiéme produit 1928 étant fait de 964, multiplié par 2, on le diviſera par 2, & l'on trouvera pour le quotient 964; ce qui fera voir que ce troiſiéme produit eſt ſans erreur.

Tous les produits particuliers d'une multiplication, dont le multiplicateur eſt compoſé de pluſieurs chiffres, étant éprouvés par des diviſions, on les ajoûtera enſemble pour avoir un produit total; & l'on éprouvera enſuite ce total en ſe ſervant de la preuve de l'addition (*N°.* 14.): & ſi l'on ne vouloit pas ſe ſervir de cette preuve, on pourroit encore diviſer le produit total par le multiplicande ou par le multiplicateur, pour

voir ſi le quotient eſt égal au multiplicateur ou au multiplicande ; ce qui aſſureroit davantage que la multiplication eſt bien faite.

Preuve de la Diviſion.

50 1°. Puiſque (*N°.* 28.) diviſer un nombre par un autre, c'eſt chercher un troiſiéme nombre qui multiplié par le ſecond, donne un produit égal au premier nombre ; nous pouvons propoſer pour preuve de la diviſion, de multiplier le quotient par le diviſeur, & de regarder une diviſion comme bonne ou mauvaiſe, ſuivant que le produit de la multiplication du quotient par le diviſeur ſera ou ne ſera pas égal au dividende.

Par exemple, ſi en diviſant 254496 par 264, on a trouvé 964 pour le quotient, l'on multipliera le quotient 964 par le diviſeur 264 ; & comme on trouvera pour le produit le nombre 254496 qui eſt égal au dividende, l'on dira que la diviſion a été bien faite ; & que 964 eſt le quotient exact de 254496 diviſé par 264 : ſi au contraire on avoit trouvé pour le quotient de la diviſion un nombre plus ou moins grand que 964, ce qui auroit pû arriver par quelque erreur de calcul ; en multipliant ce quotient trop petit ou trop grand par le diviſeur 264, l'on trouveroit que le produit ſeroit plus petit ou plus grand que le dividende 254496, & l'on jugeroit par là qu'il y a quelque erreur dans la diviſion.

Pour prévenir la multiplicité des erreurs & les découvrir dans le cours de la diviſion, à meſure qu'on les fait, il eſt bon de vérifier chaque chiffre du quotient à meſure qu'on le trouve. Voici un exemple de cette opération.

Suppoſons qu'on ait à diviſer 254496 par 264.

Dividende	254496	264	*diviſeur*
1er. *produit*	2376	964	*quotient*
1er. *reſte*	1689		
2e. *produit*	1584		
2e. *reſte*	1056		
3e. *produit*	1056		
Dernier reſte	0000		

Commençant la diviſion par les chiffres de la plus haute eſpece, l'on diviſera d'abord 2544 *centaines* par 264, & l'on trouvera 9 centaines pour le quotient; l'on écrira donc 9 au quotient dans un rang qui ſe trouvera celui des centaines. Pour voir ſi le chiffre 9 placé au quotient eſt bon, ou ſi le diviſeur 964 eſt 9 fois dans le dividende 2544 qu'on a premierement diviſé, l'on multiplie 264 par 9; ce qui donne un premier produit 2376 que l'on écrit au-deſſous du dividende actuel 2544: puis on retranche ce produit 2376 de 2544, & l'on trouve 168 pour le premier reſte.

Pour connoître ſi ce premier reſte 168 qui vaut 168 *centaines* eſt bon, il faut s'aſſurer de deux choſes. 1°. Il faut prouver que 2376 eſt exactement le produit de 264 par 9; ce qu'on fera en prenant la neuviéme partie de ce produit: & comme cette neuviéme partie ſera égale au diviſeur 264 qu'on a regardé comme un multiplicande, en faiſant le produit 2376; on ſera sûr que ce produit eſt bon. 2°. Il faut s'aſſurer que la ſouſtraction eſt bonne; ce qu'on fera en ajoûtant le reſte 168 avec le produit 2376 qu'on a retranché: & comme on trouvera que la ſomme eſt parfaitement égale à celle 2544 dont on a ſouſtrait; on ſera sûr que le

reſte 168 qui eſt moindre que le diviſeur 264, eſt bon.

Pour continuer la diviſion, l'on abaiſſe les 9 *dixaines* du dividende à la droite des 168 *centaines* reſtantes de la diviſion qu'on vient de faire; & l'on a 1689 *dixaines* à diviſer par 264, ce qui donne 6 dixaines pour le quotient. Enſuite on multiplie 264 par 6, ce qui donne 1584 pour un ſecond produit que l'on retranche de 1689; & l'on trouve 105 pour un ſecond reſte. On éprouvera cette ſeconde diviſion comme la premiere. 1°. En prenant la ſixiéme partie de 1584 qu'on trouvera égale au diviſeur 264, ce qui marquera que le produit 1584 eſt bon. 2°. En ajoûtant 105 avec 1584, ce qui fera une ſomme égale au dividende actuel 1689, & prouvera que le reſte 105 qui eſt moindre que le diviſeur 264, eſt bon.

On éprouvera de la même maniere les opérations qu'on fera pour les 4 unités du quotient.

On doit remarquer ici que chaque reſte de diviſion particuliere doit toûjours être moindre que le diviſeur; ſans quoi le diviſeur ſeroit contenu dans ce reſte, & ce ſeroit une marque que l'on n'auroit pas écrit un nombre aſſez grand au quotient.

Lorſqu'on dit que le diviſeur multiplié par le quotient doit produire une quantité égale au dividende, on ſuppoſe que le dividende eſt diviſé ſans aucun reſte; mais ſi la diviſion a un reſte, on ajoûtera ce reſte au produit de la multiplication du diviſeur par le quotient, & la ſomme qui en réſultera ſera égale au dividende, ſi l'on a bien opéré.

2°. On peut encore prouver la diviſion par la diviſion elle-même, en diviſant le dividende par le quotient: car ſi l'on trouve pour le nouveau quotient, une quantité égale au premier diviſeur, ce ſera une marque que la premiere diviſion a été bien faite.

REMARQUE.

51 Avant d'éprouver ſi une diviſion eſt bonne, par la multiplication du diviſeur par le quotient; il eſt bon d'examiner ſi le quotient a autant de chiffres qu'il doit en avoir; ce qui eſt facile à reconnoître.

1°. Si pour trouver le premier chiffre, c'eſt-à-dire le chiffre du plus haut degré du quotient, il a fallu prendre un chiffre de plus dans le dividende qu'il n'y en a dans le diviſeur; le nombre des chiffres du quotient ſera égal à la différence qu'il y aura entre le nombre des chiffres du dividende & celui des chiffres du diviſeur.

Par exemple, ſi l'on propoſe de diviſer 17328 par 24, dont le quotient ſera 722, comme les deux chiffres du diviſeur 24 ne ſont pas contenus dans les deux chiffres 17 de la gauche du dividende, il faudra prendre les trois chiffres 173 du dividende & les diviſer par 24, pour trouver le premier chiffre 7 du quotient. Dans ce cas, pour un chiffre qu'il y a de plus dans le dividende particulier 173 que dans le diviſeur 24, il vient un chiffre pour le quotient; mais comme il y a encore dans le dividende deux chiffres 28 auſquels on n'a point touché, qu'il faut diviſer ſucceſſivement ces deux chiffres avec les reſtes des diviſions précédentes, & que chaque diviſion particuliere donne un chiffre pour le quotient; il eſt clair qu'on aura pour le quotient un nombre de chiffres égal à la différence qu'il y aura entre le nombre des chiffres du dividende & le nombre des chiffres du diviſeur.

2°. Si pour trouver le premier chiffre du quotient, il ſuffit de prendre autant de chiffres dans le dividende qu'il y en a dans le diviſeur; le nombre des chiffres du quotient ſera plus grand d'un chiffre que la différence qu'il y aura entre le nombre des chiffres du dividende & le nombre des chiffres du diviſeur.

Par exemple, ſi l'on propoſe de diviſer 3456 par 24, dont le quotient eſt 144; comme les deux chiffres du diviſeur 24 ſont contenus dans les deux chiffres 34 du dividende; cette premiere diviſion, où il n'y a point de différence entre le nombre des chiffres du dividende & le nombre des chiffres du diviſeur, donnera un chiffre pour le quotient. Chacun des chiffres 56 qui ſont de plus dans le dividende que dans le diviſeur, & que l'on diviſera ſucceſſivement avec les reſtes des diviſions, donnera encore un chiffre pour le quotient. Il y aura donc au quotient un nombre de chiffres plus grand d'un chiffre que la différence qu'il y aura entre le nombre des chiffres du dividende & le nombre des chiffres du diviſeur.

AUTRE PREUVE DE LA MULTIPLICATION ET DE LA DIVISION APPELLÉE *Preuve par 9.*

On peut encore éprouver la multiplication & la diviſion par une opération très-ſimple appellée Preuve par 9.

Suppoſons qu'on ait multiplié 4872 *par* 863, *& qu'on ait trouvé* 4204536 *pour le produit.*

Pour en avoir la preuve, on additionnera les chiffres 4, 8, 7, 2, *du multiplicande, comme s'ils ne contenoient que des unités ſimples; & ôtant tous les* 9, *on conſervera le reſte* 3.

On additionnera de même les chiffres 8, 6, 3, *du multiplicateur; & rejettant tous les* 9, *on ne gardera que le reſte* 8.

Enſuite on multipliera le reſte 3 *du multiplicande par le reſte* 8 *du multiplicateur; ce qui produira* 24, *dont les deux chiffres additionnés ne font que* 6.

Si ce reſte eſt égal au reſte de l'addition des chiffres 4, 2, 0, 4, 5, 3, 6, *du produit, après avoir ſupprimé tous les* 9; *on pourra préſumer que la multiplication eſt juſte: ſinon ce ſera une preuve qu'elle contient quelque erreur.*

On éprouvera de même la diviſion, en la regardant comme une multiplication qui a le diviſeur pour multiplicande,

le quotient pour multiplicateur, & le dividende pour produit ; c'eſt-à-dire que ſuppoſant l'addition faite & tous les 9 rejettés, on multipliera le reſte du diviſeur par le reſte du quotient : & ſi, après avoir ajoûté au produit les chiffres du reſte de la diviſion lorſqu'il y en a, & avoir ôté tous les 9, le reſte eſt égal au reſte du dividende ; on préſumera que la diviſion eſt juſte ; autrement, on ſera sûr qu'elle eſt mal faite.

Cette preuve eſt fondée ſur les obſervations ſuivantes.

Si l'on retranche les 9 contenus dans un nombre exprimé par un chiffre ſignificatif ſuivi de pluſieurs zéros, le reſte ſera repréſenté par un chiffre égal au chiffre ſignificatif de ce nombre.

Par exemple, ſi des nombres 4000, 800, 70, *on rejette les 9, les reſtes ſeront* 4, 8, 7.

Ainſi en rejettant les 9 d'un nombre quelconque, tel que 4872 *qui vaut* 4000 *plus* 800 *plus* 70 *plus* 2, *le reſte ſera* 4 *plus* 8 *plus* 7 *plus* 2 ; *& ſupprimant encore les 9 contenus dans ces quatre chiffres qui valent* 21 ; *il reſtera* 2 *plus* 1, *ou* 3.

Donc ſi l'on regarde tous les chiffres d'un nombre comme des chiffres d'unités ſimples, & qu'en les aſſemblant on ſupprime tous les 9, le reſte ſera égal à celui qu'on auroit en ôtant tous les 9 du nombre propoſé.

Donc ſi l'on veut multiplier l'un par l'autre deux facteurs tels que 4872 *&* 863, *& que ſans faire leur produit on veuille en rejetter tous les 9 pour avoir le reſte ; on pourra retrancher tous les 9 des facteurs (parce que la multiplication de ces 9 par un nombre quelconque, ne produira que des 9 qu'on veut rejetter) & ne prendre que leurs reſtes* 3 *&* 8 *qu'on multipliera enſemble, & dont le produit* 24 *ſera réduit à* 6 *par la ſuppreſſion des 9.*

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

LIVRE III.

Des Fractions.

CHAPITRE PREMIER.

Des Fractions en général & de leur Réduction.

NOus avons dit que l'unité eſt une quantité arbitraire que l'on prend pour ſervir de meſure à d'autres grandeurs de même eſpece, & que la collection de pluſieurs unités s'appelle *nombre*.

Juſqu'ici nous n'avons parlé que des nombres qui ſont compoſés de pluſieurs unités entieres, & que nous avons nommés par cette raiſon *nombres entiers*; mais il arrive ſouvent que l'unité qu'on a choiſie, ou qui eſt établie par l'uſage, eſt trop grande pour être contenue exactement une ou pluſieurs fois dans la grandeur qu'on veut meſurer. Dans ce cas, l'on fait de nouvelles unités plus petites qui puiſſent meſurer exactement la grandeur propoſée, c'eſt-à-dire qui puiſſent être contenues en elle juſtement une fois, ou un certain nombre de fois.

DÉFINITIONS.

52 Pour avoir des unités convenables à la grandeur qu'on veut meſurer, l'on partage l'unité principale qu'on a choiſie, en pluſieurs parties égales que l'on nomme en général *unités fractionnaires*, & qui ont encore des noms particuliers dérivés du nombre des parties dans leſquelles l'unité principale a été diviſée. Par exemple ſi l'on partage l'unité principale en 2 ou en 3 ou en 4 ou en 5 parties égales; chaque partie ſe nomme 1 *demi* ou 1 *tiers* ou 1 *quart* ou 1 *cinquiéme*; & ces parties ſont des *unités fractionnaires*.

Une unité fractionnaire ou la collection de pluſieurs unités fractionnaires égales, ſe nomme une *fraction* ou un *nombre rompu*.

Il faut donc deux nombres pour repréſenter un nombre rompu; ſavoir un nombre pour marquer l'eſpece de l'unité fractionnaire, c'eſt-à-dire pour faire voir en combien de parties égales l'unité principale a été rompue; & un autre nombre pour faire voir combien de fois ces nouvelles unités ſont priſes.

Pour diſtinguer ces deux nombres, on les écrit l'un ſous l'autre avec une barre entre-deux. L'on met au-deſſous de la barre celui qui marque en combien de parties égales l'unité principale a été rompue, & qui déſigne par conſéquent l'eſpece de l'*unité fractionnaire*; & l'on écrit au-deſſus de la barre le nombre qui montre combien de fois l'on prend l'*unité fractionnaire*.

Par exemple, $\frac{7}{8}$ eſt un nombre rompu ou une fraction dont le nombre inférieur (8) ſignifie que l'unité principale a été diviſé en 8 parties égales, & que chaque partie eſt par conſéquent 1 *huitiéme* de l'unité principale; & le nombre ſupérieur (7) marque que l'on prend 7 de ces nouvelles unités; en ſorte que la frac-

tion $\frac{7}{8}$ ſignifie 7 *huitiémes* de l'unité ou de la quantité que l'on a priſe pour l'unité.

Comme le nombre inférieur d'une fraction donne la dénomination à l'*unité fractionnaire*, on le nomme *dénominateur*; & parce que le nombre ſupérieur fait voir combien la fraction contient de ces nouvelles unités, ou qu'il marque le nombre que l'on en prend, on l'appelle *numérateur*. Ainſi dans la fraction $\frac{7}{8}$, le nombre inférieur (8) qui ſignifie *huitiémes*, eſt le *dénominateur*; & le nombre ſupérieur (7) qui marque que l'on prend 7 de ces unités nommées *huitiémes*, eſt le *numérateur*.

Le numérateur & le dénominateur d'une fraction ſe nomment les deux *termes* de cette fraction; le numérateur s'appelle le *premier terme*, & le dénominateur s'appelle le *ſecond terme*.

On diſtingue deux ſortes de nombres rompus; les *nombres rompus abſtraits*, ou *abſolus*, ou *vagues*, & les *nombres rompus concrets*.

Les nombres rompus tels que $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{6}$, qui ſignifient 1 *quart de fois*, 2 *cinquiémes de fois*, 5 *ſixiémes de fois*, ſont nommés *abſtraits*, ou *abſolus*, ou *vagues*, tant qu'ils ne ſont appliqués à aucune eſpece de choſe.

Les nombres rompus que l'on applique à nombrer les parties de quelque choſe, ſont nommés des *nombres rompus concrets*. Par exemple $\frac{1}{4}$ *écu*, $\frac{2}{5}$ *toiſe*, $\frac{5}{6}$ *heure*, qui ſignifient *un quart d'écu*, *deux cinquiémes de toiſe*, *cinq ſixiémes d'heure*, ſont des *nombres rompus concrets*.

Il y a donc deux ſortes d'unités à conſidérer dans un nombre rompu concret, ſavoir l'unité principale qui eſt rompue, & l'unité propre de la fraction, qui n'eſt qu'une partie de l'unité principale. Par exemple dans cette fraction $\frac{7}{10}$ *écu*, il faut conſidérer l'*écu* comme l'unité principale qui eſt rompue en 10 parties égales, & l'unité propre de la fraction qui eſt 1 *dixiéme d'écu*,

COROLLAIRE PREMIER.

53 On peut encore considérer une fraction comme le quotient d'une division, en prenant son numérateur pour le dividende & son dénominateur pour le diviseur. Par exemple, la fraction $\frac{7}{8}$ peut être regardée comme le quotient de 7 divisé par 8.

Car diviser 7 par 8, c'est prendre la huitiéme partie de 7; mais pour prendre la huitiéme partie de 7, il faut prendre la huitiéme partie de chacune des unités qui composent 7 : & comme chaque unité donnera 1 huitiéme pour sa huitiéme partie, 7 unités donneront 7 huitiémes, c'est-à-dire la fraction $\frac{7}{8}$ pour leur huitiéme partie. Ainsi la fraction $\frac{7}{8}$ est le quotient de 7 divisé par 8.

COROLLAIRE II.

54 Comme il est évident que l'on ne change point un nombre en le multipliant & le divisant par une même quantité; puisqu'on le rend d'autant moindre par la division qu'on le rend plus grand par la multiplication, il est clair que l'on pourra toûjours convertir un nombre entier en une fraction, en le multipliant par un nombre quelconque pour en faire un numérateur, & en lui donnant ce même nombre pour dénominateur.

COROLLAIRE III.

55 Puisqu'une fraction est égale au quotient de la division de son numérateur par son dénominateur; il est clair qu'une fraction est égale à l'unité entiere, lorsque son numérateur est égal à son dénominateur; car le dénominateur sera contenu une fois dans son numérateur.

Corollaire IV.

56 Une fraction eſt le quotient de la diviſion de ſon numérateur par ſon dénominateur (*N°.* 53.). Mais (*N°.* 33.) en multipliant ou en diviſant par une même quantité le dividende & le diviſeur d'une diviſion, l'on ne change rien à la valeur du quotient. Donc ſi l'on multiplie ou ſi l'on diviſe par une même quantité le numérateur & le dénominateur d'une fraction, la fraction ne changera point de valeur.

Si l'on a, par exemple, une fraction $\frac{4}{5}$, & qu'on multiplie le numérateur 4 & le dénominateur 5 par 3 ou par 4, on aura une nouvelle fraction $\frac{12}{15}$ ou $\frac{16}{20}$ qui vaudra autant que la premiere $\frac{4}{5}$.

Et réciproquement, ſi l'on diviſe par un même nombre, par exemple par 3, le numérateur & le dénominateur d'une fraction $\frac{12}{15}$, l'on aura une nouvelle fraction $\frac{4}{5}$ qui ſera égale à la premiere $\frac{12}{15}$.

57 *En diviſant le numérateur & le dénominateur d'une fraction par une même quantité, on la rend plus ſimple & d'autant plus ſimple que la quantité par laquelle on diviſe eſt plus grande. Enfin lorſque les deux termes d'une fraction ſont diviſés par le plus grand diviſeur commun, on dit que la fraction dont les deux termes ne peuvent plus être diviſés, eſt réduite à ſes moindres termes.*

Problême.

58 *Réduire une fraction à ſes moindres termes, ſans en changer la valeur.*

On diviſera le plus grand terme par le moindre; & ſi la diviſion ſe fait ſans reſte, le moindre terme ſera évidemment le plus grand diviſeur commun des deux termes de la fraction, dont le moindre terme ſe réduira à l'unité.

Si la diviſion ne ſe fait pas ſans reſte, on diviſera le moindre terme par le reſte ; & ſi cette diviſion ſe fait ſans reſte, le reſte de la premiere diviſion ſera le plus grand diviſeur commun des deux termes de la fraction.

Si cette ſeconde diviſion ne ſe fait pas ſans reſte, l'on diviſera le premier reſte par le deuxiéme ; puis on diviſera le ſecond reſte par le troiſiéme, & toûjours de même juſqu'à ce que l'on parvienne à une diviſion ſans reſte : & alors le dernier diviſeur ſera le plus grand diviſeur commun des deux termes de la fraction. Ainſi en diviſant les deux termes par ce dernier diviſeur, l'on réduira la fraction à ſes moindres termes. Mais ſi l'on ne parvient point à faire une diviſion ſans reſte, ou ſi l'on parvient à un reſte qui ſoit l'unité ; ce ſera une marque que la fraction eſt exprimée par ſes plus ſimples termes, & qu'elle n'eſt pas réductible à des termes plus ſimples.

Par exemple, ſi l'on propoſe de réduire à ſes moindres termes la fraction $\frac{2016}{5796}$.

L'on diviſera le plus grand terme 5796 par le moindre 2016. La diviſion étant faite, il reſtera 1764.

L'on diviſera 2016 par le reſte 1764 ; & ſans faire aucune attention au quotient, l'on ne prendra que le reſte 252.

L'on diviſera le premier reſte 1764 par le ſecond reſte 252 ; & comme la diviſion ſe fera exactement, ce dernier diviſeur 252 ſera le plus grand diviſeur commun des deux termes de la fraction $\frac{2016}{5796}$. Ainſi diviſant les deux termes de cette fraction par 252, l'on aura une nouvelle fraction $\frac{8}{23}$ qui ne pourra pas avoir de plus ſimples termes, & qui aura la même valeur que la fraction propoſée $\frac{2016}{5796}$. Voici la démonſtration de cette opération.

1°. En diviſant par 2016 le dénominateur de la

fraction $\frac{2016}{5796}$; on trouve que le diviſeur y eſt contenu 2 fois avec un reſte 1764. Ainſi le dénominateur 5796 eſt compoſé de deux parties 4032 & 1764, & la fraction $\frac{2016}{5796}$ peut avoir cette forme $\frac{2016}{2\times 2016 \text{ plus } 1764}$. Donc tout nombre qui ſera le plus grand diviſeur exact des deux termes de la fraction $\frac{2016}{5796}$, doit être auſſi le plus grand diviſeur commun de 2×2016 & de 1764 qui ſont les deux parties du dénominateur, & doit par conſéquent être auſſi le plus grand diviſeur de 2016 & de 1764.

2°. Diviſant 2016 par 1764, on trouvera qu'il y eſt contenu une fois avec 252 de reſte, c'eſt-à-dire que 2016 eſt compoſé de deux parties, de 1764 & de 252. Ainſi le nombre qui ſera le plus grand diviſeur de 2016 & de 1764 ſera auſſi un diviſeur de 252; mais 252 eſt le plus grand diviſeur de 252, & il diviſe exactement 1764: donc il diviſera auſſi 2016 qui eſt la ſomme de 252 & de 1764, & ſera auſſi un diviſeur de 2 fois 2016, c'eſt-à-dire de 2×2016.

Le nombre 252 étant un diviſeur de 2×2016 & de 1764, ſera auſſi un diviſeur de leur ſomme 5796, & diviſera par conſéquent le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{2016}{5796}$.

De plus, 252 eſt le plus grand diviſeur commun de 2016 & de 5796; puiſque le diviſeur commun de ces deux nombres doit être un diviſeur de 252, & que 252 eſt le plus grand diviſeur de 252.

REMARQUE.

Il y a encore une maniere de réduire une fraction à ſes moindres termes, qui eſt plus facile & ſouvent plus commode que la précédente.

1°. Si le numérateur & le dénominateur d'une fraction ſont des nombres pairs, on les diviſera tous

les deux par 2, juſqu'à ce que l'un de ces deux termes ſoit devenu impair. Si les deux termes finiſſent par 5, on pourra auſſi les diviſer par 5, juſqu'à ce que l'un des deux ne finiſſe plus par 5. Les deux termes de la fraction n'étant point pairs & ne finiſſant point par 5, on tentera de les diviſer par 3, juſqu'à ce que l'un des deux ne ſoit plus diviſible par 3. Enſuite on tentera de diviſer les deux nouveaux termes par 7, puis par 11, puis par 13, par 17, 19, 23; & toûjours ainſi de ſuite par tous les nombres qui n'ont point d'autres diviſeurs qu'eux-mêmes & l'unité. Enfin lorſque l'un des termes ne ſera plus diviſible, ou que les deux termes ne pourront plus être diviſés par une même quantité, la fraction ſera réduite à ſes moindres termes.

Par exemple, ſi l'on propoſe de réduire la fraction $\frac{1016}{3780}$ à ſes moindres termes.

On diviſera les deux termes qui ſont pairs par 2, & l'on aura $\frac{1008}{1890}$.

On diviſera encore par 2 les deux nouveaux termes qui ſont pairs, & l'on aura $\frac{504}{945}$.

Puis diviſant ces deux termes par 3, l'on aura $\frac{168}{315}$.

Diviſant encore par 3, l'on aura $\frac{56}{105}$.

Diviſant enſuite par 7, on trouvera $\frac{8}{15}$.

Et cette fraction $\frac{8}{15}$ ſera enfin la fraction réduite, parce que ſon numérateur 8 ne peut être diviſé que par 2, ou par un multiple de 2, & que ſon dénominateur 15 ne peut pas être diviſé par 2.

Si les deux termes de la fraction ont des zéros à leur droite, il eſt évident qu'on pourra en effacer un pareil nombre dans ces deux termes; parce que chaque terme ſe trouvera diviſé par 10 chaque fois que l'on ſupprimera un zéro.

Suppoſons qu'on veut réduire à ſes moindres termes la fraction $\frac{3150}{11400}$.

On

On diviſera d'abord les deux termes par 10, en ſupprimant dans chaque terme le zéro qui occupe la place des unités ſimples; & l'on aura $\frac{315}{1140}$.

Puis, comme le nouveau numérateur finit par 5, & qu'il eſt par conſéquent diviſible par 5, auſſi bien que le nouveau dénominateur qui finit par un zéro, l'on diviſera par 5; & l'on aura $\frac{63}{228}$.

Enſuite on diviſera par 3; & l'on aura $\frac{21}{76}$.

Et cette fraction $\frac{21}{76}$ ſera réduite à ſes moindres termes; parce que le numérateur 21 n'eſt diviſible que par 7 & par 3, & que le dénominateur 76 n'eſt diviſible ni par l'un ni par l'autre.

PROBLÉME.

59 *Réduire deux fractions au même dénominateur, ſans rien changer à la valeur de ces fractions.*

On multipliera le numérateur & le dénominateur de la premiere fraction par le dénominateur de la ſeconde, & l'on multipliera le numérateur & le dénominateur de la ſeconde par le dénominateur de la premiere. Par cette opération l'on aura (*N°.* 56.) deux autres fractions de même valeur que les deux premieres, & qui auront un même dénominateur; puiſque leur dénominateur ſera le produit des dénominateurs des deux premieres fractions.

Par exemple, ſi l'on veut réduire à la même dénomination les deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{7}$.

1°. L'on multipliera les deux termes 2 & 3 de la premiere fraction $\frac{2}{3}$ par le dénominateur 7 de la ſeconde; & l'on aura une nouvelle fraction $\frac{14}{21}$ égale à la premiere $\frac{2}{3}$.

2°. L'on multipliera les deux termes 5 & 7 de la ſeconde fraction $\frac{5}{7}$ par le dénominateur 3 de la premiere; & l'on aura une nouvelle fraction $\frac{15}{21}$ égale à la ſeconde $\frac{5}{7}$.

Par ce moyen les deux fractions propoſées $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{7}$, ſans changer de valeur, ſeront réduites aux deux fractions $\frac{14}{21}$ & $\frac{15}{21}$, qui ont chacune pour dénominateur le produit des dénominateurs 3 & 7 des deux fractions propoſées.

PROBLÉME.

60 *Réduire à un même dénominateur tant de fractions qu'on voudra.*

1°. On multipliera enſemble tous les dénominateurs des fractions, & le produit ſera le dénominateur que doivent avoir toutes les fractions réduites à la même dénomination.

2°. Pour avoir le numérateur d'une fraction quelconque réduite à la même dénomination, par exemple celui de la premiere; on multipliera enſemble tous les dénominateurs, excepté celui de la premiere fraction; puis on multipliera le produit par le numérateur de la premiere fraction, & l'on aura le numérateur de cette premiere fraction.

Si l'on vouloit avoir le numérateur de la ſeconde fraction réduite; l'on multiplieroit enſemble tous les dénominateurs, excepté celui de la ſeconde fraction; puis on multiplieroit le produit par le numérateur de la même ſeconde fraction propoſée; & le nouveau produit ſeroit le numérateur de la ſeconde fraction réduite: & ainſi des autres.

Par exemple, ſi l'on propoſe de réduire à la même dénomination les quatre fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$; l'on multipliera enſemble tous les dénominateurs 2, 3, 5, 7, des quatre fractions propoſées; & le produit 210 ſera le nouveau dénominateur qui doit être commun à toutes les fractions.

Pour avoir le numérateur de la premiere des nouvelles fractions; on multipliera enſemble tous les

dénominateurs, excepté le premier (2), c'eſt-à-dire qu'on multipliera enſemble les trois dénominateurs 3, 5, 7; puis on multipliera leur produit 105 par le numérateur 1 de la premiere fraction, & le produit 105 ſera le numérateur de la premiere fraction qui deviendra $\frac{105}{210}$.

Pour avoir le numérateur de la ſeconde nouvelle fraction; l'on multipliera enſemble tous les dénominateurs, excepté le ſecond (3), c'eſt-à-dire qu'on multipliera enſemble les trois dénominateurs 2, 5, 7, qui produiront 70; puis on multipliera 70 par le numérateur 2 de la ſeconde fraction propoſée, & le produit 140 ſera le numérateur de la nouvelle ſeconde fraction $\frac{140}{210}$.

On trouvera de même les numérateurs des deux autres fractions qui ſeront $\frac{168}{210}$ & $\frac{180}{210}$. Ainſi les quatre fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, réduites à la même dénomination, deviendront celles-ci $\frac{105}{210}$, $\frac{140}{210}$, $\frac{168}{210}$, $\frac{180}{210}$.

REMARQUE.

61 Par ces deux Problêmes, on donnera même dénominateur à tant de fractions qu'on voudra, ſans en changer la valeur; mais ces fractions ne ſeront pas toûjours réduites aux moindres termes qu'elles peuvent avoir en conſervant un dénominateur commun.

1°. Si parmi les fractions réduites à leurs moindres termes, telles que celles-ci $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$; il ne s'en trouve pas pluſieurs dont les dénominateurs ayent un diviſeur commun; lorſque ces fractions ſeront réduites à la même dénomination, les nouvelles fractions $\frac{105}{210}$, $\frac{140}{210}$, $\frac{168}{210}$, $\frac{180}{210}$, qu'on aura, ne pourront point être réduites à de moindres termes en conſervant un dénominateur commun.

2°. Si parmi les fractions qu'on ſuppoſe réduites à leurs moindres termes, il s'en trouve pluſieurs dont

les dénominateurs ayent un diviſeur commun ; lorſque toutes ces fractions auront été réduites à la même dénomination, on pourra les réduire à de moindres termes, & leur conſerver un dénominateur commun, en diviſant leurs numérateurs & le dénominateur commun, par le commun diviſeur, autant de fois moins une qu'il y aura dans les premieres fractions de dénominateurs auſquels ce diviſeur ſera commun. En voici des exemples.

Si l'on a ces quatre fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, parmi leſquelles il y en a deux dont les dénominateurs 2 & 4 peuvent être diviſés par 2 ; lorſque toutes ces fractions ſeront réduites à la même dénomination, & ſeront devenues $\frac{140}{280}$, $\frac{210}{280}$, $\frac{56}{280}$, $\frac{40}{280}$, on pourra diviſer le numérateur & le dénominateur de chacune d'elles une fois ſeulement par 2 ; ce qui les réduira à celles-ci $\frac{70}{140}$, $\frac{105}{140}$, $\frac{28}{140}$, $\frac{20}{140}$.

Si l'on propoſe ces quatre fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, parmi leſquelles il y en a trois dont les dénominateurs 2, 4, 6, peuvent être diviſés par 2 ; lorſque toutes ces fractions ſeront réduites à la même dénomination, & ſeront devenues $\frac{168}{336}$, $\frac{84}{336}$, $\frac{56}{336}$, $\frac{48}{336}$, on pourra diviſer le numérateur de chacune d'elles, & le dénominateur commun, deux fois de ſuite par 2 ; ce qui les réduira à celles-ci $\frac{42}{84}$, $\frac{21}{84}$, $\frac{14}{84}$, $\frac{12}{84}$.

Si l'on a ces quatre fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, parmi leſquelles il y en a trois $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, dont les dénominateurs ſont diviſibles par 2, & encore deux $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, dont les dénominateurs ſont diviſibles par 3 ; lorſque ces quatre fractions ſeront réduites à la même dénomination, & ſeront devenues $\frac{72}{144}$, $\frac{48}{144}$, $\frac{36}{144}$, $\frac{24}{144}$, après avoir diviſé le numérateur de chacune d'elles, & leur dénominateur commun, deux fois de ſuite par 2, & qu'elles ſeront réduites à celles-ci $\frac{18}{36}$, $\frac{12}{36}$, $\frac{9}{36}$, $\frac{6}{36}$, les numérateurs & le dénominateur commun de ces

dernieres fractions pourront encore être diviſés par 3, & donneront celles-ci $\frac{6}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{12}$, qui ne peuvent plus être réduites en conſervant un dénominateur commun.

Les fractions qu'on a propoſé de réduire à la même dénomination, étoient toutes réduites à leurs moindres termes. Lorſqu'on en propoſera qui ne ſeront pas réduites à leurs moindres termes, il ſera toûjours à propos de les y réduire avant de leur donner un même dénominateur.

PROBLÉME.

62 *Trouver les entiers qui ſont dans les fractions.*

Les opérations qu'on fera ſur les fractions, en feront ſouvent réſulter d'autres fractions dont les numérateurs ſeront plus grands que leurs dénominateurs. Et comme une fraction eſt égale à l'unité entiere, lorſque ſes deux termes ſont égaux; les fractions contiendront autant d'unités entieres, que les numérateurs contiendront de fois leurs dénominateurs.

Donc pour trouver le nombre des unités entieres contenues dans une fraction; il faudra diviſer véritablement le numérateur par le dénominateur, & le quotient de cette diviſion ſera le nombre des unités entieres contenues dans la fraction. A l'égard du reſte de la diviſion, s'il y en a, on en fera le numérateur d'une fraction qui aura le diviſeur pour dénominateur.

Par exemple $\frac{18}{4}$ étant une fraction propoſée; l'on diviſera le numérateur 18 par le dénominateur 4, & l'on aura pour quotient 4 unités entieres avec un reſte 2, & ce reſte étant diviſé par 4, donnera la fraction $\frac{2}{4}$ qu'on réduira à $\frac{1}{2}$; enſorte que la fraction $\frac{18}{4}$ ſera convertie en 4 unités & $\frac{1}{2}$.

CHAPITRE II.

De l'Addition & de la Souſtraction des Fractions.

NOUS renfermons dans un même Chapitre l'addition & la ſouſtraction des fractions ; parce que ces deux opérations demandent les mêmes préparations.

On ne peut ajoûter enſemble ou ſouſtraire véritablement les unes des autres, que des quantités qui ſont compoſées d'unités de la même eſpece. Ainſi les fractions ne peuvent être ajoûtées enſemble ou ſouſtraites les unes des autres, que quand leurs unités fractionnaires ſont les mêmes ; & pour cela il faut qu'elles ayent le même dénominateur.

PROBLÉME.

63 *Ajoûter enſemble pluſieurs fractions.*

1°. Si les fractions propoſées ont un même dénominateur ; on aura leur ſomme, en faiſant une nouvelle fraction de même dénominateur, qui aura pour numérateur, la ſomme de leurs numérateurs.

Par exemple ſi l'on veut ajoûter enſemble les fractions $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{7}$ qui ont le même dénominateur 7, & dont les unités propres ſont par conſéquent des ſeptiémes ; on ajoûtera enſemble les trois numérateurs 3, 4, 6, ce qui fera 13 ; puis donnant à cette ſomme le même dénominateur, 7 (parce que les unités ajoûtées enſemble n'étant que des ſeptiémes, leur collection ne peut être compoſée que de ſeptiémes), l'on aura la fraction $\frac{13}{7}$ pour la ſomme demandée.

2°. Si les fractions qu'on propoſe d'ajoûter enſemble n'ont pas le même dénominateur : on les réduira à la même dénomination (*N°.* 59 & 60.) ; puis on additionnera ces nouvelles fractions enſemble, comme il vient d'être dit.

Par exemple ſi l'on propoſe d'ajoûter les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$; on les convertira en celles-ci $\frac{105}{210}$, $\frac{140}{210}$, $\frac{168}{210}$, $\frac{180}{210}$, qui ont un même dénominateur. Enſuite on ajoûtera enſemble leurs numérateurs 105, 140, 168, 180 ; & ayant appliqué à leur ſomme 593 le dénominateur 210, on aura une ſeule fraction $\frac{593}{210}$ égale à la ſomme des fractions $\frac{105}{210}$, $\frac{140}{210}$, $\frac{168}{210}$, $\frac{180}{210}$, qui ſont égales aux quatre premieres fractions propoſées $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$.

De l'addition de pluſieurs fractions, il réſulte le plus ſouvent une fraction dont le numérateur eſt plus grand que le dénominateur. Une telle fraction étant plus grande que l'unité principale, doit être réduite (N°. 62.) aux entiers qu'elle contient, & à une fraction qu'elle peut contenir de plus.

Par exemple nous avons trouvé dans le dernier Problême que la ſomme de trois fractions $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{7}$, étoit $\frac{13}{7}$ dont le numérateur 13 contient le dénominateur 7 une fois avec un reſte 6 ; ainſi cette fraction $\frac{13}{7}$ vaut un entier & $\frac{6}{7}$.

PROBLÉME.

64 *Souſtraire une fraction d'une autre fraction.*

1°. Si les fractions ont un même dénominateur, leurs unités propres ſeront égales ; & pour retrancher l'une de l'autre, il n'y aura qu'à retrancher le nombre des unités propres de l'une, du nombre des unités propres de l'autre.

Or les numérateurs des fractions expriment les nombres des unités propres qu'elles contiennent. Donc on aura le reſte de la ſouſtraction, en retranchant

le numérateur de l'une du numérateur de l'autre, & en appliquant au reſte le dénominateur commun aux deux fractions ; parce que les unités reſtantes de la ſouſtraction doivent être de même eſpece que celles du nombre dont on a ſouſtrait.

Par exemple ſi l'on propoſe de retrancher $\frac{2}{9}$ de $\frac{8}{9}$; on retranchera 2 de 8, & il reſtera 6 qu'on prendra pour un numérateur auquel on appliquera le même dénominateur 9 ; & l'on aura, pour le reſte de la ſouſtraction, la fraction $\frac{6}{9}$ qui peut être réduite à la fraction $\frac{2}{3}$.

2°. Si les fractions propoſées ont différens dénominateurs ; on les réduira à la même dénomination. Enſuite on ſouſtraira l'une de l'autre, comme il a été dit dans l'article premier.

Par exemple ſi l'on veut ſouſtraire $\frac{2}{3}$ de $\frac{6}{7}$; on réduira d'abord ces deux fractions à la même dénomination, & elles deviendront $\frac{14}{21}$ & $\frac{18}{21}$. Alors ſouſtrayant le numérateur 14 du numérateur 18, il reſtera 4 ; & appliquant à ce reſte le dénominateur 21, l'on aura $\frac{4}{21}$ pour le reſte de la ſouſtraction.

CHAPITRE III.

De la Multiplication & de la Diviſion des Fractions.

LEs multiplications & diviſions des fractions par des fractions, ne ſont pas de ſimples multiplications ni de ſimples diviſions : ce ſont des opérations compoſées de la multiplication & de la diviſion des fractions par des nombres entiers, comme on le verra dans la ſuite de ce Chapitre. Ainſi avant de traiter de la multiplication & de la diviſion des fractions par des fractions, nous devons expliquer la multiplication & la diviſion des fractions par des nombres entiers.

PROBLÈME.

65 *Multiplier une fraction par un nombre entier.*

Multiplier une fraction par un nombre entier, par exemple par 2, ou par 3, ou par 4, &c, c'eſt la répéter 2 fois, ou 3 fois, ou 4 fois, &c, ou en général autant de fois que le multiplicateur contient l'unité : ainſi c'eſt faire une fraction 2 fois ou 3 fois ou 4 fois &c auſſi grande que la fraction propoſée. Or on peut faire cette opération en deux manieres, en opérant ſur le numérateur ſeulement, ou en opérant ſur le dénominateur ſeulement.

1°. Si l'on veut opérer ſur le numérateur ſeulement ; il faudra multiplier le numérateur de la fraction propoſée, par le nombre entier qui doit ſervir de multiplicateur ; & appliquant à ce produit le dénominateur de la fraction propoſée, on aura une nouvelle fraction qui ſera le produit demandé : ce qui eſt évident, puiſque toutes les parties de la fraction à multiplier ſeront répétées autant de fois que le multiplicateur contient d'unités.

Par exemple pour multiplier la fraction $\frac{2}{9}$ par 4 ; on multipliera ſon numérateur 2 par 4, & l'on aura le nombre 8 auquel on appliquera le même dénominateur 9 ; ce qui donnera $\frac{8}{9}$ pour le produit.

2°. Si l'on ne veut opérer que ſur le dénominateur ; on diviſera ce dénominateur par le multiplicateur propoſé ; & prenant le quotient pour le dénominateur d'une nouvelle fraction à laquelle on donnera le numérateur de la fraction qui doit être multipliée, la nouvelle fraction qui réſultera de cette opération, ſera encore le produit demandé.

Par exemple ſi l'on veut multiplier $\frac{5}{12}$ par 2 ; on diviſera le dénominateur 12 par 2, & l'on aura une

nouvelle fraction $\frac{5}{6}$ qui ſera le produit de $\frac{5}{12}$ multiplié par 2.

Car l'unité principale étant diviſée en deux fois plus de parties dans la fraction $\frac{5}{12}$ que dans la fraction $\frac{5}{6}$, les unités fractionnaires de la fraction $\frac{5}{6}$ ſeront doubles de celles de la fraction $\frac{5}{12}$. Et comme ces fractions ont le même nombre de parties, celle $\frac{5}{6}$ dont les parties ſont doubles, ſera double de l'autre $\frac{5}{12}$.

Comme il eſt toûjours poſſible de multiplier un nombre par un autre, & qu'on ne peut pas toûjours diviſer un nombre par un autre ſans reſte; il ſera toûjours poſſible de faire la multiplication d'une fraction par un nombre entier, en multipliant ſon numérateur par le nombre entier donné pour multiplicateur; mais on ne pourra pas toûjours multiplier une fraction par un nombre entier, en diviſant ſon dénominateur par le multiplicateur propoſé.

PROBLÊME.

66 *Diviſer une fraction par un nombre entier.*

Diviſer une fraction par un nombre entier, par exemple par 2, ou par 3, ou par 4, &c; c'eſt faire une nouvelle fraction qui ſoit 2 fois ou 3 fois ou 4 fois &c plus petite que la fraction qu'on veut diviſer. Or on peut faire cette opération en deux manieres différentes; en opérant ſur le numérateur ſeulement, ou en opérant ſur le ſeul dénominateur.

1°. Si l'on veut opérer ſur le numérateur ſeulement; il faudra diviſer le numérateur de la fraction propoſée, par le nombre entier qui doit ſervir de diviſeur; & donnant au quotient le dénominateur de la fraction propoſée, l'on aura une nouvelle fraction qui ſera le quotient demandé: ce qui eſt évident, puiſque le numérateur ou le nombre des parties fractionnaires de cette nouvelle fraction, ſera contenu dans le

numérateur ou dans le nombre des parties fractionnaires de la fraction propoſée, autant de fois que l'unité eſt contenue dans le diviſeur.

Par exemple ſi l'on propoſe de diviſer par 4 la fraction $\frac{8}{9}$; on diviſera ſeulement ſon numérateur 8 par 4, ſans toucher à ſon dénominateur 9; & l'on aura une nouvelle fraction $\frac{2}{9}$ qui ſera le quotient de la fraction $\frac{8}{9}$ diviſée par 4.

2°. Si l'on ne veut opérer que ſur le ſeul dénominateur; on multipliera le dénominateur de la fraction par le diviſeur propoſé; & prenant le produit pour le dénominateur d'une nouvelle fraction à laquelle on donnera le numérateur de la fraction propoſée, la nouvelle fraction qu'on formera ſera encore le quotient demandé.

Par exemple ſi l'on propoſe de diviſer la fraction $\frac{6}{7}$ par 4; on ne touchera point à ſon numérateur 6, & l'on multipliera ſeulement ſon dénominateur 7 par 4; ce qui donnera la fraction $\frac{6}{28}$, pour le quotient de la fraction $\frac{6}{7}$ diviſée par 4.

Car l'unité principale étant diviſée en quatre fois plus de parties dans la fraction $\frac{6}{28}$ que dans la fraction $\frac{6}{7}$; les unités fractionnaires de la fraction $\frac{6}{28}$ ne ſeront que des quatriémes parties de celles de la fraction $\frac{6}{7}$. Et comme ces deux fractions ont le même nombre de parties; celle $\frac{6}{28}$ dont les parties ſont quatre fois plus petites, ſera contenue quatre fois dans l'autre $\frac{6}{7}$, c'eſt-à-dire autant de fois qu'il y a d'unités dans le diviſeur 4.

Comme on peut toûjours multiplier le dénominateur d'une fraction par un nombre entier, & que ſouvent il n'eſt pas poſſible de diviſer exactement ſon numérateur ſans reſte: il eſt clair qu'on pourra toûjours diviſer une fraction en multipliant ſon dénominateur, & qu'il ne ſera pas toûjours poſſible de la diviſer en diviſant ſon numérateur,

PROBLÉME.

67 *Multiplier une fraction par une fraction.*

Multiplier par une fraction, c'eſt multiplier par le numérateur de cette fraction, & diviſer par le dénominateur de la même fraction.

Pour mieux faire entendre cette propoſition, ſuppoſons qu'il faille multiplier une grandeur quelconque par la fraction $\frac{3}{4}$ qui ſignifie le quart de 3, & qui eſt par conſéquent 4 fois moindre que ſon numérateur 3.

Si au lieu de multiplier par $\frac{3}{4}$, l'on multiplie par le numérateur 3; l'on aura un produit quadruple de celui qu'on doit avoir; parce qu'on aura multiplié par un nombre quadruple de celui $\frac{3}{4}$ par lequel on devoit multiplier. Ainſi il faudra diviſer ce produit par le dénominateur 4, pour le réduire à la juſte valeur qu'il doit avoir. Il eſt évident qu'il en ſera de même des autres fractions par leſquelles il faudra multiplier. Donc multiplier par une fraction, c'eſt multiplier par le numérateur de cette fraction, & diviſer en même temps par le dénominateur de la même fraction.

Cela poſé & bien entendu; il eſt aiſé de prouver qu'il y a quatre manieres différentes de multiplier une fraction par une fraction.

1°. On multipliera une fraction par une fraction, en multipliant le numérateur de la premiere par le numerateur de la ſeconde, & en multipliant auſſi le dénominateur de la premiere par le dénominateur de la ſeconde; enſorte que le produit de cette multiplication, ſera une fraction qui aura pour numérateur le produit des deux numérateurs, & pour dénominateur le produit des deux dénominateurs.

Suppoſons qu'on ait à multiplier la fraction $\frac{5}{7}$ par $\frac{3}{4}$. Si l'on multiplie le numérateur 5 du multiplicande

par le numérateur 3 du multiplicateur, on multipliera par un nombre quadruple de celui par lequel on doit multiplier ; puiſqu'on ne doit multiplier que par le quart de 3 : ainſi le produit $\frac{15}{7}$ qu'on aura, ſera quadruple du produit que l'on doit trouver. Ce produit doit donc être diviſé par 4 pour être réduit à la juſte valeur qu'il doit avoir. Or en multipliant par 4 le dénominateur de ce produit $\frac{15}{7}$, l'on diviſe ce produit par 4 (*N°.* 66.). Donc la fraction $\frac{15}{28}$ eſt le juſte produit de la multiplication de $\frac{3}{7}$ multiplié par $\frac{1}{4}$; c'eſt-à-dire que le produit de deux fractions eſt égal à une fraction qui a pour numérateur le produit des deux numérateurs, & qui a pour dénominateur le produit des deux dénominateurs.

2°. On multipliera une fraction par une autre fraction, en diviſant le dénominateur de la premiere par le numérateur de la ſeconde, & en diviſant en même temps le numérateur de la premiere par le dénominateur de la ſeconde.

Par exemple ſi l'on doit multiplier $\frac{2}{10}$ par $\frac{2}{3}$; on diviſera d'abord le dénominateur 10 de la premiere fraction, par le numérateur 2 de la ſeconde. Par cette opération la fraction $\frac{2}{10}$ ſera multipliée par 2 (*N°.* 65.) ; & par conſéquent le produit $\frac{2}{5}$ ſera triple de celui qu'on demande ; puiſque le nombre 2 par lequel on aura multiplié, eſt triple de celui $\frac{2}{3}$ par lequel on devoit multiplier. Ce produit $\frac{2}{5}$ doit donc être diviſé par 3 pour être réduit à la juſte valeur qu'il doit avoir. Or en diviſant le numérateur 9 de ce produit trop grand $\frac{2}{5}$, par le dénominateur 3 du multiplicateur, l'on diviſe ce produit $\frac{2}{5}$ par 3 (*N°.* 66.). Donc la nouvelle fraction $\frac{2}{5}$, qu'on trouve par cette derniere opération, eſt le véritable produit des deux fractions $\frac{2}{10}$ & $\frac{2}{3}$.

Juſqu'ici nous avons multiplié une fraction par une frac-

tion en opérant ſur le numérateur & le dénominateur du multiplicande de la même façon, c'eſt-à-dire en opérant ſur tous les deux par multiplication ou par diviſion. Nous allons voir maintenant qu'on peut faire la même opération, en opérant ſeulement ſur l'un des deux termes de la fraction qui doit être multipliée.

3°. On multiplie une fraction par une fraction, ſans toucher au dénominateur du multiplicande, en multipliant ſon numérateur par le numérateur du multiplicateur, & en diviſant le numérateur réſultant de cette multiplication, par le dénominateur du multiplicateur.

Suppoſons qu'on veuille multiplier la fraction $\frac{12}{13}$ par $\frac{2}{3}$. On multipliera le numérateur 12 du multiplicande par le numérateur 2 du multiplicateur. Par cette premiere opération, la fraction $\frac{12}{13}$ ſera multipliée par 2 (*N°. 65.*); & le produit $\frac{24}{13}$ ſera triple de celui qu'on demande, puiſqu'on aura multiplié par 2 qui eſt triple du nombre $\frac{2}{3}$ par lequel on devoit multiplier: ainſi ce produit $\frac{24}{13}$ doit être diviſé par le dénominateur 3 du multiplicateur, pour être réduit à ſa juſte valeur. Or en diviſant par 3 le numérateur du produit $\frac{24}{13}$ qu'on vient de trouver, ce produit ſera diviſé par 3 (*N°. 66.*). Donc la fraction $\frac{8}{13}$ réſultante de cette diviſion, ſera le véritable produit de la fraction $\frac{12}{13}$ multipliée par $\frac{2}{3}$.

4°. On multipliera une fraction par une fraction, ſans toucher au numérateur de la premiere, en diviſant le dénominateur de la premiere par le numérateur de la ſeconde, & en multipliant enſuite ce nouveau dénominateur par le dénominateur de la ſeconde.

Par exemple ſi l'on veut multiplier la fraction $\frac{1}{4}$ par la fraction $\frac{2}{3}$, ſans toucher au numérateur de la premiere $\frac{1}{4}$; l'on diviſera le dénominateur 4 de la premiere $\frac{1}{4}$, par le numérateur 2 de la ſeconde; & par

cette premiere opération la fraction $\frac{1}{4}$ ſera multipliée par 2 (*N°. 65.*). Ainſi la fraction réſultante $\frac{1}{2}$ ſera triple de celle qu'on demande, puiſqu'on aura multiplié par 2 qui eſt triple de la fraction $\frac{2}{3}$ par laquelle on devoit multiplier ; & par conſéquent il faudra diviſer ce produit $\frac{1}{2}$, par le dénominateur 3 de la fraction $\frac{2}{3}$. Or (*N°. 66.*) le produit $\frac{1}{2}$ ſera diviſé par 3 en multipliant par 3 ſon dénominateur 2. Donc la fraction $\frac{1}{6}$ réſultante de cette ſeconde opération, ſera le véritable produit de la fraction $\frac{1}{4}$ multiplié par la fraction $\frac{2}{3}$.

68 *Quoiqu'on ait toûjours ſoigneuſement diſtingué la fraction multiplicande de la fraction multiplicateur, on peut prendre indifféremment celle des deux fractions que l'on veut, pour multiplicateur ou pour multiplicande, ſans qu'il en arrive aucun inconvénient. Car multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$, c'eſt préciſément la même choſe ; puiſque ſuivant la premiere méthode de multiplier une fraction par une fraction, il en doit réſulter pour le produit, une fraction dont le numérateur ſoit égal au produit des deux numérateurs, & dont le dénominateur ſoit égal au produit des deux dénominateurs.*

COROLLAIRE PREMIER.

69 Un nombre entier peut être regardé comme une fraction dont il eſt le numérateur & dont le dénominateur eſt l'unité. Par exemple 3 peut être conſidéré comme une fraction $\frac{3}{1}$: & ainſi des autres.

Lorſqu'on aura un entier à multiplier par une fraction ; l'on pourra donc rapporter cette opération à la multiplication d'une fraction par une fraction.

Par exemple ſi l'on doit multiplier 3 par $\frac{4}{5}$; on rapportera cette multiplication à celle de $\frac{3}{1}$ par $\frac{4}{5}$; & l'on aura pour le produit $\frac{12}{5}$, ou deux entiers & $\frac{2}{5}$.

Mais multiplier $\frac{3}{1}$ par $\frac{4}{5}$, c'eſt la même choſe que de multiplier $\frac{4}{5}$ par $\frac{3}{1}$ (parce qu'on peut prendre pour multiplicateur la fraction que l'on veut) & $\frac{3}{1}$ eſt égal au nombre entier 3 : donc la multiplication d'un entier par une fraction, par exemple de 3 par $\frac{4}{5}$, eſt la même choſe que la multiplication de la fraction par l'entier. Comme nous avons expliqué cette opération (*N°* 65), nous n'en parlerons pas davantage.

COROLLAIRE II.

70 Donc la multiplication par une fraction dont le numérateur eſt égal à l'unité, eſt une véritable diviſion par le dénominateur de cette fraction. Par exemple les multiplications qu'on aura à faire par les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c, ſeront de véritables diviſions par les dénominateurs 2, 3, 4, &c de ces fractions.

Car nous avons vû que la multiplication par une fraction eſt une opération compoſée de la multiplication par le numérateur de la fraction, & de la diviſion par le dénominateur de la même fraction. Mais le numérateur de la fraction multiplicateur étant l'unité, ne multipliera point, c'eſt-à-dire ne donnera qu'un produit égal à la quantité multipliée. Donc l'opération de la multiplication par une fraction qui aura l'unité pour numérateur, ſe réduira à une véritable diviſion par le dénominateur de cette fraction.

PROBLÊME.

71 *Diviſer une fraction par une autre fraction.*

La diviſion par une fraction n'eſt pas une diviſion ſimple. C'eſt une opération compoſée d'une diviſion par le numérateur de la fraction diviſeur, & d'une multiplication par le dénominateur de la même fraction.

Pour

Pour le démontrer, ſuppoſons qu'on ait à diviſer un nombre quelconque par la fraction $\frac{3}{4}$, & que l'on diviſe d'abord par le numérateur 3 de la fraction diviſeur $\frac{3}{4}$. Ce diviſeur 3 étant 4 fois trop grand, puiſqu'on ne doit diviſer que par le quart de 3, donnera un quotient 4 fois trop petit : ainſi il faudra multiplier ce quotient par le dénominateur 4 de la fraction diviſeur, pour qu'il devienne tel qu'il doit être. Donc pour diviſer un nombre quelconque par une fraction, il faut le diviſer par le numérateur de la fraction diviſeur, & multiplier le quotient par le dénominateur de la même fraction.

Comme le numérateur & le dénominateur de la fraction par laquelle on doit diviſer, ſont ſuppoſés des nombres entiers ; les deux Problêmes que nous avons réſolus, l'un pour multiplier une fraction par un nombre entier, l'autre pour diviſer une fraction par un nombre entier, ſont ſuffiſans pour faire la diviſion d'une fraction par une fraction.

Corollaire premier.

72 Nous venons de voir que la diviſion par une fraction, par exemple par $\frac{3}{4}$, ſe réduit à une diviſion par le numérateur 3, ſuivie d'une multiplication par le dénominateur 4 de la même fraction. Ainſi la diviſion par la fraction $\frac{3}{4}$, ſe réduira à la multiplication par la fraction inverſe $\frac{4}{3}$; puiſque pour multiplier par cette fraction inverſe $\frac{4}{3}$, il faudra multiplier par 4 & diviſer par 3, & que nous avons vû qu'il faut faire les mêmes opérations pour diviſer par la fraction $\frac{3}{4}$.

Comme nous avons quatre manieres de multiplier une fraction par une fraction, il y aura auſſi quatre manieres de diviſer une fraction par une fraction.

EXEMPLES.

1°. Si l'on propoſe de diviſer la fraction $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$; l'on retournera les termes de la fraction diviſeur $\frac{3}{4}$, pour avoir ſon inverſe $\frac{4}{3}$; puis on multipliera la fraction $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{3}$, & le produit $\frac{8}{9}$ ſera le quotient de la diviſion de $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$.

2°. Si l'on propoſe de diviſer 5 par $\frac{2}{3}$, ou $\frac{5}{1}$ par $\frac{2}{3}$; l'on retournera la fraction diviſeur $\frac{2}{3}$, pour avoir ſon inverſe $\frac{3}{2}$: enſuite on multipliera 5 ou $\frac{5}{1}$ par $\frac{3}{2}$, & le produit $\frac{15}{2}$ ſera le quotient de 5 diviſé par $\frac{2}{3}$.

COROLLAIRE II.

73 Donc la diviſion par une fraction dont le numérateur eſt l'unité, eſt une véritable multiplication par le dénominateur de cette fraction; car pour diviſer par les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c, il faut multiplier par les inverſes $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$, &c qui ne ſignifient que 2, 3, 4, &c; parce que l'unité ne diviſe point.

CHAPITRE IV.

Des Fractions de Fractions.

74 NOUS avons vû dans le Chapitre précédent qu'une fraction eſt une unité fractionnaire ou la collection de pluſieurs unités fractionnaires. Soit qu'une fraction contienne une ou pluſieurs unités fractionnaires, on peut la conſidérer comme une unité collective; & de même que l'unité principale ſe partage en pluſieurs unités fractionnaires, la fraction conſidérée comme unité collective, peut être partagée en pluſieurs autres parties égales que nous appellerons *unités fractionnaires de fraction.*

Une quantité qui vaut une ou plusieurs unités fractionnaires de fraction s'appelle *fraction de fraction.*

Par exemple si l'on a une fraction $\frac{5}{6}$, & qu'en la considérant comme une unité, on la partage en trois parties égales ; chaque partie qui ne sera que le tiers de la fraction $\frac{5}{6}$, sera une unité fractionnaire de fraction, & la quantité qui vaudra une ou plusieurs de ces unités fractionnaires se nommera *fraction de fraction.*

Pour exprimer une fraction de fraction, il faut deux fractions entre lesquelles on met l'article *de.* Par exemple si l'on veut exprimer les deux tiers de la fraction $\frac{5}{6}$, l'on écrit $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{6}$, & l'on dit, 2 tiers de 5 sixiémes.

Le dénominateur 3 de la premiere fraction fait voir en combien de parties la seconde fraction est divisée ; & le numérateur de la premiere fraction marque combien on prend de ces parties de fraction.

De même que l'on partage une fraction en plusieurs parties égales, & que d'une ou de plusieurs de ces parties l'on fait une *fraction de fraction* ; de même aussi l'on partage une fraction de fraction en plusieurs parties égales, & l'on prend une ou plusieurs de ces nouvelles parties pour faire une *fraction de fraction de fraction* : & ainsi de suite à l'infini.

Toutes ces especes différentes de fractions de fractions s'écrivent les unes après les autres, en les séparant par l'article *de.*

Par exemple si l'on a une fraction $\frac{5}{6}$ & qu'on en prenne les $\frac{2}{3}$, l'on dira, deux tiers de cinq sixiémes, & l'on écrira $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{6}$, qui est une fraction de fraction.

Si l'on veut avoir les trois quarts de cette fraction de fraction, l'on dira, trois quarts des deux tiers de cinq sixiémes, & l'on écrira, $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{6}$.

THÉORÈME.

75 *Une fraction de fraction eſt égale au produit de la multiplication des deux fractions par leſquelles elle eſt exprimée.*

Prenons pour exemple la fraction de fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{6}$ qui indique qu'il faut prendre deux fois le tiers de cinq ſixiémes.

Nous avons dit, dans le Chapitre précédent, que pour prendre le tiers de cinq ſixiémes, il faut diviſer cette fraction par 3 : ainſi pour prendre deux fois le tiers de la fraction $\frac{5}{6}$, il faudra la diviſer par 3, & multiplier le quotient par 2, c'eſt-à-dire multiplier l'un par l'autre les deux dénominateurs & les deux numérateurs des fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{6}$; ce qui donnera (ſuivant les regles de la multiplication des fractions) le produit de ces mêmes fractions.

Donc une fraction de fraction eſt égale au produit de la multiplication des deux fractions par leſquelles elle eſt exprimée.

COROLLAIRE PREMIER.

76 Donc la fraction de fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{6}$ eſt égale à la fraction de fraction $\frac{5}{6}$ *de* $\frac{2}{3}$. Car une fraction de fraction eſt le produit des deux fractions par leſquelles elle eſt exprimée ; & ce produit ſera toûjours le même, quelque ſoit l'arrangement des deux fractions.

COROLLAIRE II.

77 Donc une fraction de fraction de fraction $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{6}$, eſt égale à une fraction qui a pour numérateur le produit des numérateurs de toutes les

fractions par leſquelles elle eſt exprimée, & qui a pour dénominateur le produit des dénominateurs des mêmes fractions.

Car la fraction de fraction de fraction $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{6}$, eſt les trois quarts de la fraction de fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{2}{6}$. Or cette fraction de fraction eſt égale à la fraction $\frac{2\times5}{3\times6}$ ou $\frac{10}{18}$: donc la fraction de fraction de fraction $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{6}$ eſt égale à la fraction de fraction $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{2\times5}{3\times6}$ ou $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{10}{18}$.

Mais cette fraction de fraction $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{2\times5}{3\times6}$ eſt égale à la fraction $\frac{3\times2\times5}{4\times3\times6}$. Donc la fraction de fraction de fraction $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{6}$ eſt auſſi égale à la fraction $\frac{3\times2\times5}{4\times3\times6}$ dont le numérateur eſt le produit de tous les numérateurs des fractions par leſquelles la fraction de fraction de fraction eſt exprimée, & dont le dénominateur eſt le produit des dénominateurs des mêmes fractions.

On peut faire voir de la même maniere que toutes les fractions de fractions de fractions de fractions &c quelque loin qu'on les pouſſe, ſont égales à des fractions qui ont pour numérateurs les produits de tous les numérateurs des fractions compoſantes, & qui ont pour dénominateurs les produits de tous les dénominateurs des mêmes fractions compoſantes.

Comme tous les numérateurs de ces fractions donneront toûjours le même produit, en quelqu'ordre qu'on les multiplie (*N°.* 20.), *& qu'il en ſera de même du produit de tous les dénominateurs; il eſt clair que toutes les fractions de fractions de fractions de fractions &c à l'infini, qui ſeront compoſées des mêmes fractions arrangées comme on voudra, ſeront égales entr'elles, puiſqu'elles ſe réduiront à la même fraction.*

CHAPITRE V.

De la Réduction des Fractions décimales qui ſont compoſées d'une ſuite infinie de Périodes égales.

78 NOUS avons déjà vû (*N°.* 47.) qu'une ſuite infinie de périodes décimales égales, eſt le quotient d'une diviſion dont le dividende eſt égal au nombre repréſenté par les chiffres d'une période, & dont le diviſeur eſt exprimé par une ſuite de 9 en même nombre que les figures de la période.

Par exemple,

0, 1111 &c	eſt le quotient de la diviſion de	1 par 9	qui eſt	$\frac{1}{9}$
0, 2626 &c		26 par 99		$\frac{26}{99}$
0, 450450 &c		450 par 999		$\frac{450}{999}$
0, 04545 &c		45 par 990		$\frac{45}{990}$
0, 00523523 &c		523 par 99900		$\frac{523}{99900}$

& ainſi des autres.

Mais outre ces fractions décimales qui ſont uniquement compoſées de périodes égales; il y en a d'autres qui indépendamment d'une ſuite infinies de périodes égales, ont encore un certain nombre de chiffres décimaux après leſquels commencent les périodes égales, telles que celles-ci (0, 1666 &c; 0, 08333 &c; 0, 004629629 &c).

La premiere (0, 1666 &c) de ces fractions eſt compoſée de (0, 1) qui ſignifie $\frac{1}{10}$, & d'une infinité de périodes de 6.

La 2e. (0, 08333 &c) eſt compoſée d'une partie (0, 08) qui ſignifie $\frac{8}{100}$, & d'une infinité de périodes de 3.

La 3e. (0, 004 629 629 &c) eſt compoſée d'une partie (0, 004) qui ſignifie $\frac{4}{1000}$, & d'une infinité de périodes de 629 : ainſi des autres.

Or tous ces nombre décimaux, & les autres qui leur reſſembleront, pourront être réduits à de ſimples fractions, comme on va le voir dans le Problême ſuivant.

PROBLÊME.

79 *Trouver une fraction ſimple, égale à un nombre décimal tel que* (0, 004 629 629 &c) *compoſé de quelques chiffres décimaux qui précédent une ſuite infinie de périodes égales.*

On ſéparera la ſuite infinie de périodes d'avec les chiffres décimaux qui les précédent, pour faire deux nombres décimaux de celui qui eſt propoſé ; & l'on aura les deux nombres décimaux

0, 004
0, 000 629 629 &c.

pour les parties du nombre (0, 004 629 629 &c.) donné.

Or la premiere partie (0, 004) qui ſignifie 4 milliémes, eſt égale à la fraction $\frac{4}{1000}$.

La ſeconde partie (0, 000 629 629 &c) qui eſt uniquement compoſée d'une ſuite infinie de périodes égales, eſt égale à la fraction $\frac{629}{999000}$ (*N°.* 48.).

Donc la ſomme des deux parties (0, 004) & (0, 000 629 629 &c), ou la ſuite décimale propoſée (0, 004 629 629 &c), eſt égale à la ſomme des deux fractions $\frac{4}{1000}$ & $\frac{629}{999000}$.

Enſuite on donnera la même dénomination à ces deux fractions. Pour cela il ſuffira de multiplier les deux termes de la premiere par 999; & l'on aura les deux fractions $\frac{3996}{999000}$ & $\frac{629}{999000}$.

Enfin l'on ajoutera enſemble ces deux fractions; & leur ſomme $\frac{4625}{999000}$ ſera la valeur de la fraction decimale propoſée (0, 004 629 629 *&c*).

Comme la fraction ſimple $\frac{4625}{999000}$ n'eſt pas réduite à ſes moindres termes, on l'y réduira en diviſant ſes deux termes par le numérateur 4625; & l'on aura $\frac{1}{216}$ pour la valeur de (0, 004 629 629 *&c*).

ELEMENS
D'ARITHMÉTIQUE.

LIVRE IV.

Des Opérations de l'Arithmétique ſur les Nombres complexes.

On fait ſur les nombres complexes les mêmes opérations que nous avons faites dans le Livre ſecond ſur les nombres incomplexes; c'eſt-à-dire qu'on les ajoûte, on les ſouſtrait, on les multiplie, & on les diviſe.

Si l'on n'avoit qu'une ſorte d'unité pour toutes les grandeurs d'une même eſpece, on ne pourroit pas exprimer avec aſſez de juſteſſe toutes ces grandeurs par les nombres, à moins que l'unité ne fut très-petite; mais alors il faudroit des nombres fort grands pour exprimer les grandeurs les plus communes, ce qui ſeroit extrémement incommode dans le commerce. Par exemple ſi l'on prenoit toûjours le denier pour unité dans le compte des monnoies, les nombres par leſquels on repréſenteroit les différentes ſommes, ſeroient 12 fois plus grands qu'en prenant le ſol pour

l'unité, & ſeroient 240 fois plus grands que ſi l'on prenoit pour unité la livre tournois.

Si l'on prenoit la livre pour l'unité & qu'on n'en eut point d'autres, on ne pourroit pas compter toutes les ſommes poſſibles ſans négliger quelque choſe moindre à la vérité que la livre, mais cependant aſſez conſidérable pour mériter qu'on y ait égard; & l'on ne pourroit point y avoir égard ſans rompre la livre en différentes parties, ce qui demanderoit une connoiſſance particuliere des fractions dont l'uſage n'eſt pas familier à tout le monde.

Pour éviter ces deux inconvéniens, l'on eſt convenu d'employer des unités de différentes grandeurs pour une même eſpece.

Dans les calculs des monnoies, l'on ſe ſert ordinairement de trois ſortes d'unités, de la *livre*, du *ſol*, & du *denier*. L'on prend auſſi pour unité l'*écu* qui vaut 3 livres, la *piſtole* qui vaut 10 livres, le *louis* qui vaut aujourd'hui 24 livres, & toutes les différentes piéces de monnoie, qui ont cours dans le commerce.

Dans les calculs de l'étendue des lignes; l'uſage & les loix ont établi pour unités, la *toiſe*, le *pied*, le *pouce*, la *ligne*, l'*aune*, la *perche*, & pluſieurs autres meſures dont l'étendue eſt fixée relativement à la toiſe. Nous parlerons plus particulierement de ces meſures & de celles qui en réſultent, dans l'Article du Toiſé.

Dans les calculs des poids, l'on prend pour unités la *livre*, le *marc*, l'*once*, le *gros*, le *ſcrupule* ou *denier*, & le *grain*. Dans les grands poids, l'on prend pour unité le *quintal* qui peſe 100 livres, & même le *millier* qui peſe 1000 livres.

Dans les calculs du temps, l'on prend pour unités l'*année*, le *mois*, le *jour*, l'*heure*, la *minute*, la *ſeconde*,

la *tierce*, &c. On prend auſſi pour unités la *ſemaine* qui eſt de 7 jours, & le *ſiécle* qui eſt de 100 années.

Dans les calculs des angles & des arcs de cercles, on prend pour unités le *degré*, la *minute*, la *ſeconde*, la *tierce*, &c. L'on prend auſſi pour unités les *ſignes* qui contiennent chacun trente degrés.

Enfin pour le calcul de chaque eſpece de choſe, l'on prend pour unités les grandeurs de quelques parties connues de la même eſpece.

Lorſqu'on a des nombres compoſés de différentes unités, la collection de ces nombres s'appelle *nombre complexe*. Par exemple la collection des trois nombres ſuivans, 12 *livres* 13 *ſols* 8 *deniers*, eſt un nombre complexe. Ces quatre autres nombres, 25 *toiſes* 4 *pieds* 5 *pouces* 10 *lignes*, font auſſi un nombre complexe.

Valeurs de différentes unités de quelques eſpeces, & caracteres par leſquels on diſtingue ces différentes unités les unes des autres.

POUR LES MONNOIES.

℔	*ſignifie* . . . livre	1 livre *vaut*	20 ſols
ß	. . . . . ſol	1 ſol *vaut*	12 deniers
₰	. . . . . denier		

POUR LES POIDS.

℔	*ſignifie* . . . livre	1℔ poids de *M vaut*	2 marcs
M	. . . . . marc	1. marc *vaut*	8 onces
O ou ℥	. . . . . once	1 once	8 gros
G ou ʒ	. . . . . gros	1 gros	3 den. *ou* 3 ſcrupules
D ou ℈	denier *ou* ſcrupule	1 denier . . .	24 grains
g	. . . . . grain		

POUR L'ÉTENDUE DES LIGNES.

T	*ſignifie* toiſe	1 toiſe *vaut*	6 pieds.
P	. . . . . pied	1 pied *vaut*	12 pouces.
p	. . . . . pouce	1 pouce . . .	12 lignes.
L	. . . . . ligne	1 ligne . . .	12 points.
A	. . . . . aune	1 aune *vaut* 3*P* 7*p* 10 lignes & 5 ſixiémes de ligne.	

CHAPITRE PREMIER.

De l'Addition des Nombres complexes.

NOUS avons déjà dit, en parlant de l'addition des nombres incomplexes, que l'addition eſt une opération par laquelle on trouve un nombre égal à la ſomme de pluſieurs autres nombres. Nous avons fait voir enſuite que les nombres additionnés doivent avoir des unités de la même eſpéce, & que de leur addition il réſulte une ſomme dont les unités ſont encore de la même eſpece.

Il en eſt de même des nombres complexes. Car quoique les unités de toutes leurs parties, ne ſoient point abſolument les mêmes, elles doivent être réductibles à des unités ſemblables, c'eſt-à-dire qu'un certain nombre d'unités de l'eſpece la moins conſidérable, doit compoſer une unité d'une autre partie dont l'eſpece eſt plus grande. Nous en avons vû aſſez d'exemples dans l'expoſition que nous venons de faire des valeurs des différentes unités de quelques eſpeces, & des caracteres par leſquels on les diſtingue les unes des autres.

PROBLÊME.

81 *Ajoûter enſemble pluſieurs nombres complexes.*

On écrira les uns ſous les autres tous les nombres complexes qu'on doit ajoûter, de maniere que toutes les parties dont les unités ſont ſemblables ſoient dans une même colonne verticale, & que tous les chiffres de même degré dans la progreſſion décuple ſoient auſſi les uns ſous les autres.

Tous les nombres complexes étant ainſi diſpoſés, & ayant tiré une barre horiſontale au-deſſous, pour les ſéparer de leur ſomme; on commencera par ajoûter enſemble toutes les parties dont les unités ſont de la plus baſſe eſpece: & ſi le nombre de ces unités aſſemblées eſt aſſez grand pour valoir une ou pluſieurs unités de l'eſpece ſupérieure; on retiendra ces unités ſupérieures pour les ajoûter avec celles de la colonne ſuivante, & l'on écrira au-deſſous de la colonne dont on a fait l'addition, le nombre des unités qui ne pourront point compoſer une unité de l'eſpece ſupérieure.

On fera la même opération pour chaque colonne; & lorſque toutes les colonnes ſeront ajoûtées, on trouvera au-deſſous de la barre, la ſomme des quantités complexes qu'on devoit additionner.

Pour faciliter l'application de ce Problême, on en va donner différens exemples; ſur les monnoies, en prenant pour unités la *livre*, le *ſol* & le *denier*; ſur l'étendue, en prenant pour unités la *toiſe*, le *pied*, le *pouce* & la *ligne*; & ſur les poids, en prenant pour unités le *marc*, l'*once*, le *gros*, le *denier* & le *grain*. On déduira aiſément de ces exemples l'application du même Problême à des nombres complexes compoſés d'unités de toute autre eſpece.

EXEMPLE PREMIER.

On propoſe de faire l'addition des quatre nombres complexes ſuivans, ou plûtôt des quatre ſommes ſuivantes, dont chacune eſt compoſée de livres, ſols & deniers.

Sommes à ajoûter	387#	12ß	8d
	759	19	11
	896	17	10
	4563	19	9
Somme totale	6608#	10ß	2d

1°. Les deniers étant les unités de la plus baſſe eſpece, on commencera par les ajoûter enſemble; & comme les dixaines de deniers ne ſont pas des unités particulieres, & qu'il faut 12d pour 1 ſol, on ajoutera non-ſeulement enſemble tous les deniers, mais encore les dixaines de deniers, pour ne faire de tout qu'une même ſomme de deniers. On dira donc: 8 deniers & 11d font 19d, & 10 font 29d, & 9 font 38d; & comme dans 38d il y a 3 fois 12 deniers qui font 3 ſols, avec 2 deniers de plus; on écrira 2 deniers au-deſſous de la barre dans la colonne des deniers, & l'on retiendra 3 ſols pour les ajoûter avec la colonne ſuivante.

2°. Comme 2 dixaines de ſols font une livre, & que nous avons des unités de ſols dont l'aſſemblage peut faire des dixaines de ſols, nous ajoûterons la colonne des ſols en deux fois, & nous commencerons par l'addition des nombres ſimples de ſols. Nous dirons donc: 3 ſols que nous avons retenus de la colonne des deniers & 2 ſols font 5ß, & 9ß font 14ß, & 7ß font 21ß, & 9ß font 30ß, ou 3 dixaines de ſols & rien de plus. Ainſi nous poſerons

un zéro dans la colonne des nombres ſimples de ſols, & nous retiendrons 3 pour le joindre avec les dixaines de ſols que nous devons ajoûter. Nous dirons donc : 3 dixaines de ſols que nous avons retenues & 1 font 4, & 1 font 5, & 1 font 6, & 1 font 7 dixaines de ſols ; & comme 2 dixaines de ſols valent 1 livre, les 7 dixaines de ſols feront 3 livres & 1 dixaine de ſols. Nous poſerons donc 1 dans la colonne des dixaines de ſols, & nous retiendrons 3 livres pour les ajoûter avec les livres.

3°. Paſſant à la colonne des livres ſimples, on dira : 3# qu'on a retenues de la colonne des dixaines de ſols & 7# font 10#, & 9# font 19#, & 6# font 25#, & 3# font 28#, dans leſquelles il y a 2 dixaines de livres & 8# de plus : ainſi l'on écrira les 8# dans la colonne des livres ſimples, & l'on retiendra 2 dixaines pour les ajoûter avec celles de la colonne ſuivante.

Le reſte de l'opération ſe fera comme nous l'avons expliqué pour l'addition des nombres incomplexes ; & l'on trouvera pour la ſomme totale 6608# 10ſ 2d.

Exemple II.

On propoſe d'ajoûter enſemble ces cinq ſommes de monnoies.

	169#	9ſ	10d
	48	7	11
	69	4	9
	57	8	8
	96	16	7
Somme totale	441#	07ſ	9d

En opérant comme dans l'exemple précédent, l'on trouvera pour la ſomme totale 441# 07ſ 9d.

Exemple III.

Pour l'Étendue.

On propoſe d'ajoûter enſemble ces quatre ſommes.

	32^T	4^P	$6p$	10^L
	144	5	9	9
	67	2	10	8
	78	3	11	11
Somme totale	323^T	5^P	$3p$	2^L

Comme les lignes ſont les unités de la plus baſſe eſpece, on ajoûtera d'abord la colonne des lignes, en diſant: 10^L & 9^L font 19^L, & 8^L font 27^L, & 11^L font 38^L, dans leſquelles il y a 36 lignes, c'eſt-à-dire 3 douzaines de lignes qui font 3 pouces, avec 2 lignes de plus : ainſi l'on écrira 2 lignes dans la colonne des lignes, & l'on retiendra 3 pouces pour les ajoûter avec la colonne des pouces.

Paſſant à la colonne des pouces, l'on dira : 3 pouces qu'on a retenus de la colonne des lignes, & 6 pouces font $9p$, & $9p$ font $18p$, & $10p$ font $28p$, & $11p$ font $39p$, dans leſquels il y a 3 douzaines de pouces qui valent 3 pieds, avec 3 pouces de plus : ainſi l'on écrira 3 pouces dans la colonne des pouces, & l'on retiendra 3 pieds pour les ajoûter avec la colonne des pieds.

Paſſant à la colonne des pieds, l'on dira : 3 pieds qu'on a retenus & 4 pieds font 7 pieds, & 5^P font 12^P, & 2^P font 14^P, & 3^P font 17^P, dans leſquels il y a 2 fois 6 pieds qui valent 2 toiſes, & 5 pieds de plus : ainſi l'on retiendra 2 toiſes pour les joindre à la colonne des toiſes, & l'on écrira 5^P dans la colonne des pieds.

Paſſant

Paſſant à l'addition de la colonne des toiſes, l'on dira : 2 toiſes qu'on a retenues & 2^T font 4^T, & 4^T font 8^T, & 7^T font 15^T, & 8^T font 23^T, dans leſquelles il y a 2 dixaines de toiſes & 3 toiſes de plus : ainſi l'on écrira 3 toiſes dans la colonne des toiſes, & l'on retiendra 2 dixaines de toiſes pour les joindre à la colonne des dixaines de toiſes qui ſuit.

On achévera l'addition comme il a été dit dans l'addition des quantités incomplexes, & l'on trouvera pour la ſomme totale, $323^T\ 5^P\ 3p\ 2L$.

EXEMPLE IV.

Pour les Poids.

On propoſe d'ajoûter enſemble ces quatre ſommes de Poids.

	35*M*	2*O*	4*G*	2*D*	20*g*
	168	3	7	2	23
	944	7	6	1	10
	479	6	4	1	9
Somme totale	1628*M*	4*O*	7*G*	2*D*	14*g*

Les grains étant les unités de la plus baſſe eſpece, on commencera par l'addition de la colonne des grains, & l'on dira : 20g & 23g font 43g, & 10g font 53g, & 9g font 62g, dans leſquels il y a 2 fois 24g qui valent 2 ſcrupules ou 2 deniers, avec 14g de plus : ainſi l'on écrira 14g dans la colonne des grains, & l'on réſervera les 2*D* pour les joindre avec la colonne des deniers ou ſcrupules.

Paſſant à la colonne des deniers, on y trouvera 6*D* qui avec les 2*D* qu'on a retenus de celle des grains, font 8*D* dans leſquels il y a 2 fois 3 ſcrupules ou deniers qui valent 2 gros avec 2 deniers de reſte : ainſi l'on écrira 2*D* dans la colonne des

ſcrupules ou deniers, & l'on retiendra 2 pour la colonne des gros.

Paſſant à la colonne des gros, & ajoûtant avec elle les 2 gros qu'on a retenus, on y trouvera 23^{G} dans leſquels on aura 2 fois 8 gros qui valent 2 onces, avec 7 gros de plus : ainſi l'on placera 7^{G} dans la colonne des gros, & l'on retiendra 2O pour les joindre à la colonne des onces.

Paſſant à la colonne des onces, & ajoûtant avec elle les 2 onces qu'on vient de retenir, on trouvera 20 onces, ou 2 fois 8 onces qui font 2 marcs ou 2 unités de la colonne ſuivante, avec 4 onces de plus : ainſi l'on écrira 4O dans la colonne des onces, & l'on retiendra 2 marcs pour les joindre avec celle des marcs.

Paſſant à la colonne des ſimples marcs, & ajoûtant avec elle les 2 marcs qu'on vient de retenir, on aura 28 marcs, c'eſt-à-dire 2 dixaines de marcs & 8 marcs de plus : ainſi l'on écrira 8 marcs dans la colonne des ſimples marcs, & l'on retiendra 2 dixaines de marcs pour les ajoûter avec la colonne des dixaines de marcs. Le reſte de l'opération ſe réduit à l'addition des nombres incomplexes.

L'opération étant entierement faite, on trouvera que la ſomme totale eſt 1628^{M} 4O 7^{G} 2D 14g.

CHAPITRE II.

De la Souſtraction des nombres complexes.

NOUS avons déjà dit, en parlant des nombres incomplexes, que la ſouſtraction eſt une opération par laquelle on retranche une quantité d'une autre. Il faut donc que la quantité que l'on propoſera de retrancher ſoit contenue dans celle dont on vou-

dra la ſouſtraire ; & par conſéquent ces deux quantités doivent être de la même eſpece, ou être réductibles à la même eſpece.

Il en eſt de même des nombres complexes. L'on ne pourroit pas ſouſtraire une quantité d'une autre, ſi cette autre quantité n'étoit pas de même eſpece que la premiere, ou ſi elles ne pouvoient pas être réduites toutes les deux à la même eſpece. Par exemple on ne pourroit point retrancher une quantité compoſée de différens poids, d'une autre quantité qui ne contiendroit que des toiſes & des parties de la toiſe ; mais on pourra toûjours ſouſtraire des toiſes ou des parties connues de la toiſe, d'une autre quantité qui ne ſera compoſée que de toiſes & de parties de la toiſe.

PROBLÊME.

82 *Souſtraire un nombre complexe d'un autre nombre complexe ou incomplexe.*

On diſpoſera les parties de la quantité qu'on veut ſouſtraire, au-deſſous des parties ſemblables de la quantité dont on doit ſouſtraire, en obſervant de mettre les unités, dixaines, centaines, &c, des parties d'une eſpece, ſous les unités, dixaines, centaines, &c, de la même eſpece ; puis on tirera une barre au-deſſous de ces nombres pour les ſéparer du reſte. Enſuite on retranchera chaque partie de la quantité qui doit être ſouſtraite, de chaque partie correſpondante de l'autre quantité, en commençant par les parties de la plus baſſe eſpece, & en paſſant de celles-ci à celles qui ſont d'une eſpece immédiatement plus grande, & de celles-ci à d'autres d'une eſpece encore immédiatement plus grande ; & toûjours ainſi de ſuite, juſqu'à ce que toutes les parties de la quantité qu'on doit retrancher, ſoient ſouſtraites.

Si le nombre des parties que l'on doit retrancher eſt moindre que le nombre des parties correſpondantes de l'autre quantité ; il n'y aura aucune difficulté pour les retrancher, & l'on écrira le reſte au-deſſous de la barre dans la même colonne où ſont ces parties.

Mais ſi le nombre des parties qu'on doit retrancher, eſt plus grand que celui des parties correſpondantes de l'autre nombre ; on empruntera une unité ſur les parties ſuivantes qui ſont une eſpece immédiatement plus grande ; puis ayant réduit cette unité en parties de même eſpece que celle qu'on veut retrancher, on les ajoûtera aux parties correſpondantes de l'autre quantité, leſquelles par cette addition ſeront en aſſez grand nombre, pour qu'on en puiſſe retrancher le nombre des parties qu'on ne pouvoit point retrancher auparavant.

On fera la même opération pour toutes les eſpeces de parties qui ſeront en plus grand nombre que les correſpondantes de l'autre quantité dont on doit retrancher, en obſervant que le nombre ſur lequel on aura emprunté une unité, ſera diminué de la même unité.

Exemple premier.

Nombre complexe dont il faut retrancher	199#	1ß	6d.
Nombre complexe qu'il faut ſouſtraire	98	14	10
Différence ou reſte de la Souſtraction	100#	6ß	8d.

Pour trouver le reſte de cette ſouſtraction, l'on commencera par ſouſtraire les deniers qui ſont les parties de la plus baſſe eſpece. Mais comme les 10 deniers qu'il faut ſouſtraire, ne ſont pas contenus dans les 6 deniers correſpondans du nombre ſupérieur, on empruntera 1 ſol ſur ce qu'il y a de ſols dans le

nombre ſupérieur ; & ayant converti ce ſol en 12 deniers, on l'ajoûtera avec les 6 deniers que l'on a déjà, ce qui fera 18 deniers dont on retranchera facilement 10 denirers ; & il reſtera 8 deniers qu'on écrira au-deſſous pour le reſte des deniers.

Paſſant à la colonne des ſols, on aura 14 ſols à retrancher de rien, parce que le ſol qui ſe trouvoit dans le nombre ſupérieur, a été emprunté & employé dans les derniers : ainſi on empruntera 1 livre ſur le nombre ſupérieur des livres ; & ayant converti cette livre en 20ß dont on retranchera 14ß ; il reſtera 6ß qu'on écrira au-deſſous pour le reſte des ſols.

Paſſant aux unités ſimples des livres, on aura 8 livres à ſouſtraire de 8 livres, à cauſe de l'unité qui a été empruntée ſur le chiffre 9 pour la porter à la colonne des ſols ; & il reſtera zéro.

Continuant la ſouſtraction comme on a fait pour les grandeurs incomplexes, l'on trouvera pour le reſte demandé 100# 6ß 8ª.

EXEMPLE II.

Nombre complexe dont il faut ſouſtraire	40#	0ß	8ª
Nombre complexe qu'il faut ſouſtraire	9	16	11
Différence ou reſte de la Souſtraction	30#	3ß	9ª

Les 11 deniers qu'il faut ſouſtraire, ne pouvant pas être retranchés de 8 deniers qui ſont au-deſſus, & les ſols & unités ſimples des livres ne pouvant rien prêter, puiſque ce ſont des zéros ; l'on empruntera une dixaine de livres, dont on laiſſera 9 livres au rang des livres, & 19 ſols au rang des ſols ; & le ſol reſtant converti en 12 deniers, étant ajoûté aux 8 deniers, on aura 20 deniers dont on ſouſtraira 11 deniers ; & il reſtera 9 deniers qu'on écrira au-deſſous.

Le reſte de l'opération ſe réduira à ſouſtraire 9 livres 16 ſols de 39 livres 19 ſols; ce que l'on fera en ſuivant les regles ci-devant expliquées.

Exemple III.

Nombre complexe dont il faut ſouſtraire	100^T	5^P	0p
Nombre complexe qu'il faut ſouſtraire	97	5	11
Difference ou reſte de la Souſtraction	2^T	5^P	1p

Ayant diſpoſé les deux nombres comme il a été dit, l'on aura 11p à retrancher de 0p. Comme cela ne ſe peut pas, on empruntera une unité ſur les pieds, & l'ayant convertie en 12 pouces, on en retranchera les 11 pouces; & il reſtera 1 pouce qu'on écrira au-deſſous.

Paſſant aux pieds, l'on y trouvera 5^P à retrancher de 4^P, parce que les 5^P du nombre ſupérieur ont prêté 1^P. Comme cela eſt impoſſible, on empruntera 1 toiſe qui étant convertie en 6 pieds ſera ajoûtée aux 4 pieds, ce qui fera 10 pieds dont on retranchera 5 pieds; & il reſtera 5 pieds qu'on écrira au-deſſous pour le reſte des pieds.

On achévera l'opération ſuivant les regles précédemment expliquées pour les nombres incomplexes.

Exemple IV.

Nombre dont il faut ſouſtraire	16℔	12℺	7^G	7g
Nombre qu'il faut ſouſtraire	8	15	7	40
Reſte de la Souſtraction	7℔	12℺	7^G	39g

Commençant par les grains qui ſont les poids de la moindre eſpéce, l'on aura 40 grains à ſouſtraire

de 7 grains, ce qui ne ſe peut pas : ainſi l'on empruntera 1 gros qui vaut 72 grains leſquels étant joints à 7 grains donneront 79 grains dont on retranchera 40 grains ; & il reſtera 39 grains que l'on écrira au-deſſous.

Paſſant à la colonne des gros, l'on aura 7 gros à retrancher de 6 gros, parce que les 7 gros du nombre ſupérieur en ont prêté un. Comme cela ne ſe peut pas, on empruntera un once qui vaut 8 gros, & joignant ces 8 gros aux 6 gros, l'on aura 14 gros dont on retranchera les 7 gros du nombre inférieur ; & il reſtera 7 gros que l'on écrira audeſſous.

Paſſant à la colonne des onces, l'on aura 15 onces à ſouſtraire des 11 onces, parce que les 12 d'en haut en ont prêté une. Comme cela ne ſe peut pas, on empruntera 1 livre qui vaut 16 onces, & qui étant jointe à 11 onces fera 27 onces dont on pourra retrancher les 15 onces du nombre inférieur ; & il reſtera 12 onces qu'on écrira au-deſſous pour le reſte des onces.

Enfin paſſant à la colonne des livres, on aura 8 livres à ſouſtraire de 15 livres, parce que les 6 livres en ont prêté une ; & il reſtera 7 livres qu'on écrira au-deſſous pour le reſte des livres.

Comme il n'y plus rien à ſouſtraire, & que tout le nombre ſupérieur a été employé, la ſouſtraction eſt faite, & ſon reſte eſt de 7℔ 12℧ 7ℊ 39g.

On a détaillé dans ces 4 exemples toutes les petites difficultés qu'on peut trouver dans la ſouſtraction des nombres complexes, ſoit dans le paſſage d'une colonne à l'autre ; ſoit pour les emprunts, dans le cas où les parties à ſouſtraire ſont en plus grand nombre que celles dont il faut les ſouſtraire. Comme les raiſonnemens qu'il faudra faire, lorſqu'il s'agira de ſouſtraire d'autres quantités complexes compoſées de parties différentes de celles que nous avons priſes

pour exemples, ſeront ſemblables à ceux que nous avons faits ; nous avons lieu de croire que ces exemples ſont ſuffiſans pour bien faire entendre la regle générale de la ſouſtraction des nombres complexes, & qu'il n'eſt pas beſoin d'en donner un plus grand nombre.

CHAPITRE III.

De la Multiplication des Nombres complexes.

83 LA multiplication par des nombres complexes, ſe fait en multipliant le multiplicande par toutes les parties du multiplicateur ; mais comme le multiplicateur, lorſqu'il eſt complexe, a des parties moindres que ſon unité principale ; & que chacune de ſes unités principales, marque qu'il faut prendre le multiplicande une fois, les parties du multiplicateur, qui ſeront moindres que l'unité principale, marqueront qu'il ne faut prendre le multiplicande qu'une partie de fois. Pour rendre les regles de la multiplication des nombres complexes plus intelligibles, nous les expliquerons par différens exemples auſquels nous en ferons l'application.

La multiplication étant une opération par laquelle on répéte le multiplicande un certain nombre de fois exprimé par le nombre des unités principales du multiplicateur ; on doit regarder le multiplicateur comme un nombre abſolu, lors même qu'il eſt appliqué à la numération d'une eſpece particuliere d'unités, comme nous l'avons expliqué dans la multiplication des nombres incomplexes ; & les unités du produit doivent par conſéquent être de la même eſpece que celles du multiplicande.

PROBLÉME.

84 *On propoſe de multiplier* 518# 14ß 8d *multiplicande*
Par 74 $\frac{1}{4}$ *multiplicateur*

Produits particuliers pour	4	2072		
	70	3626		
	10ß	37		
	4ß	14	16ß	
	8d	2	9	4d
	$\frac{1}{4}$	129	13	8
Produit total		38515#	19ß	

Pour multiplier dans un ordre convenable & régulier toutes les parties du multiplicande propoſé, par toutes les parties du multiplicateur; on commencera par multiplier tout le multiplicande par 74, enſuite on multipliera le même multiplicande par la fraction $\frac{1}{4}$.

Mais le multiplicande 518# 14ß 8d étant compoſé de trois parties, il faudra multiplier ces trois parties les unes après les autres par 74.

1°. Pour multiplier 518# par 74, l'on opérera comme on a fait pour les nombres incomplexes; c'eſt-à-dire qu'on multipliera d'abord 518# par 4 unités, & qu'on multipliera enſuite le même nombre 518# par 7 dixaines; ce qui donnera ces deux produits particuliers 2072 unités & 3626 dixaines, qui ſeront placés comme on le voit dans l'exemple.

2°. Pour multiplier 14ß par 74, on partagera 14ß en parties qui puiſſent être contenues chacune un certain nombre de fois dans la livre qui eſt l'unité principale du multiplicande. Ces parties ſeront 10ß & 4ß qu'on multipliera ſéparément par 74.

Pour multiplier 10ˢ par 74, on remarquera que 10ˢ eſt la moitié d'une livre, & qu'une livre entiere étant multipliée par 74 donneroit 74 livres; d'où l'on conclura que la moitié d'une livre ou 10ˢ ne doit donner que la moitié de 74ᵗ, c'eſt-à-dire 37ᵗ.

Pour multiplier 4ˢ par 74, on remarquera que 4ˢ n'eſt que la cinquiéme partie d'une livre, & que 1 livre multipliée par 74 donnant 74ᵗ, la cinquiéme partie de 1ᵗ ou 4ˢ multipliés par 74, ne doivent donner que la cinquiéme partie de 74ᵗ qui eſt 14ᵗ 16ˢ: car la cinquiéme partie de 74ᵗ eſt 14ᵗ, & il reſte 4ᵗ qui valent 80ˢ dont la cinquiéme partie eſt 16ˢ.

3°. Pour multiplier 8 deniers par 74, on pourra remarquer que 8 deniers ne ſont que la trentiéme partie d'une livre, & que 8 deniers multipliés par 74 ne doivent par conſéquent produire que la trentiéme partie de 74ᵗ: ainſi l'on pourroit prendre la trentiéme partie du multiplicateur 74, conſidéré comme un nombre de livres.

Mais au lieu de prendre tout d'un coup la trentiéme partie de 74ᵗ, il ſera plus commode de faire uſage du produit 14ᵗ 16ˢ qu'on a trouvé pour 4ˢ: car en conſidérant que 8 deniers ſont la ſixiéme partie de 4ˢ, le produit de 8ᵈ par 74 ne doit être que le ſixiéme du produit 14ᵗ 16ˢ qu'on a trouvé en multipliant 4ˢ par 74. Ainſi l'opération ſe réduira à prendre le ſixiéme de 14ᵗ 16ˢ qui ſera 2ᵗ 9ˢ 4ᵈ; parce que la ſixiéme partie de 14ᵗ eſt 2ᵗ; & il reſte 2ᵗ qui valent 40ˢ leſquels avec 16ˢ font 56ˢ dont la 6ᵉ. partie eſt 9ˢ; & il reſte 2 ſols qui valent 24 deniers dont la 6ᵉ. partie eſt 4 deniers.

Juſqu'ici le multiplicande 518ᵗ 14ˢ 8ᵈ n'a été multiplié que par 74. Il reſte donc encore à le multiplier par la fraction $\frac{1}{4}$.

Si l'on avoit 518ᵗ 14ˢ 8ᵈ à multiplier par 1, il

faudroit le prendre 1 fois, & l'on auroit pour le produit le multiplicande entier 518# 14ß 8d. Ainſi pour multiplier ce même nombre par $\frac{1}{4}$, il faut prendre le quart de 518# 14ß 8d, que l'on trouvera être 129# 13ß 8d, parce que le quart de 518# eſt 129#; & il reſte 2#, c'eſt-à-dire 40ß qui ajoûtés à 14ß font 54ß dont le $\frac{1}{4}$ eſt 13ß; & il reſte encore 2ß ou 24d qui avec 8d font 32d dont le quart eſt 8d.

Toutes les parties du multiplicande étant ainſi multipliées par toutes les parties du multiplicateur, & tous les produits particuliers étant écrits; on additionnera tous ces produits, & la ſomme 38515# 19ß ſera le produit total du nombre complexe 518# 14ß 8d multiplié par $74\frac{1}{4}$.

Les Regles de la multiplication des grandeurs complexes ſont aſſez bien établies dans cet exemple de multiplication des monnoies, pour faire appercevoir ce qu'il y aura à obſerver dans d'autres exemples. Il eſt donc inutile d'en donner davantage; & il ſuffit d'expoſer quelles parties il faudra prendre du multiplicateur conſideré comme un nombre de livres pour les différens nombres de ſols & de deniers qui ſeront dans le multiplicande.

REMARQUE.

85 Lorſque le nombre des ſols ou des deniers, ou que les ſols & les deniers enſemble ſont contenus exactement un certain nombre de fois dans 20ß, c'eſt-à-dire dans une livre; on dit que les ſols ou les deniers, ou que les ſols & les deniers enſemble, ſont des *parties aliquotes* de la livre. Ainſi les parties aliquotes de la livre ſont toûjours une fraction de la livre, qui a l'unité pour numérateur, & qui a pour dénominateur le nombre de fois que les ſols ou les deniers, ou les ſols & les deniers enſemble, ſont contenus dans la livre.

Parties aliquotes de la Livre.

10ß ſont la *moitié* de 20ß ou de la livre : ainſi pour 10ß, l'on prend la moitié du multiplicateur conſideré comme un nombre de livres.

5ß ſont le *quart* de la livre ; l'on prend donc le quart du multiplicateur pour 5 ſols.

Pour 4ß, qui ſont le *cinquiéme* de la livre, on prend le cinquiéme du multiplicateur.

Pour 2ß, qui ſont le *dixiéme* de la livre, on prend le dixiéme du multiplicateur.

Pour 1ß, qui eſt la *vingtiéme* partie de la livre, on prend le vingtiéme du multiplicateur.

Pour 6ß 8d, qui ſont le *tiers* de la livre, on prend le tiers du multiplicateur.

Pour 3ß 4d, qui ſont le *ſixiéme* de la livre, on prend le ſixiéme du multiplicateur.

Pour 1ß 8d, qui ſont le *douziéme* de la livre, on prend le douziéme du multiplicateur.

Pour 2ß 6d, qui ſont le *huitiéme* de la livre, on prend le huitiéme du multiplicateur.

Pour 6d, qui ſont la *quarantiéme* partie de la livre, on prend la quarantiéme partie du multiplicateur.

Pour 3d, qui ſont la *quatre-vingtiéme* partie de la livre, on prend la quatre-vingtiéme partie du multiplicateur.

Pour 8d, qui ſont la *trentiéme* partie de la livre, on prend la trentiéme partie du multiplicateur.

Pour 4d, qui ſont la *ſoixantiéme* partie de la livre, on prend la ſoixantiéme partie du multiplicateur.

Pour 2d, qui ſont la *cent-vingtiéme* partie de la livre, on prend la cent-vingtiéme partie du multiplicateur.

Pour 1d, qui eſt la *deux-cent-quarantiéme* partie de la livre, on prend la deux-cent-quarantiéme partie du multiplicateur.

Lorſqu'un nombre de ſols n'eſt pas exactement contenu dans la livre un nombre de fois entier ſans reſte, on le nomme *partie aliquante* de la livre. On nomme auſſi partie aliquante de la livre un nombre de deniers qui n'eſt pas contenu dans la livre un nombre de fois entier ſans reſte.

Lorſqu'on trouve dans le multiplicande un nombre de ſols ou de deniers qui n'eſt point partie aliquote de la livre, & qui n'en eſt que partie aliquante; on le partage en deux ou trois parties dont chacune ſoit une partie aliquote de la livre.

MÉTHODE ABRÉGÉE

86 *Pour multiplier les ſols par des nombres entiers; & pour avoir au produit les livres que ce produit peut contenir.*

On multipliera le nombre des ſols par le chiffre des unités ſimples du multiplicateur; & ſi ce produit eſt moindre que 20, on l'écrira dans la colonne des ſols; mais ſi ce produit eſt plus grand que 20, l'on retiendra 1^{ll} pour chaque vingtaine de ſols qu'il contiendra, & l'on écrira le reſte dans la colonne des ſols. Enſuite pour avoir les livres du produit, on multipliera la moitié du nombre des ſols par tous les autres chiffres du multiplicateur, en reculant d'une place vers la droite chaque chiffre de ce produit, & en ajoûtant à la premiere partie du produit le nombre des livres qu'on aura retenues. Par ce moyen l'on aura tout d'un coup en livres & en ſols le produit de la multiplication des ſols du multiplicande, par le nombre entier qui ſera donné pour multiplicateur.

EXEMPLE PREMIER.

On propoſe de multiplier	0#	1ß
Par	457	
Produit	22#	17ß

1°. On multipliera le chiffre 1ß par le chiffre 7 des unités du multiplicateur ; & comme le produit 7ß eſt moindre que 20ß, on l'écrira dans la colonne des ſols.

1°. Pour avoir les livres du produit, on multipliera ½ qui eſt la moitié du nombre des ſols par les autres chiffres 45 du multiplicateur, c'eſt-à-dire qu'on prendra la moitié de 45, en reculant d'une place vers la droite chaque chiffre du produit qui ſera 22# 10ß dont on placera la premiere partie 22# dans le rang des livres, comme on vient de l'indiquer ; & pour les 10ß on placera une dixaine à la gauche de 7ß que l'on a premierement écrit.

Par cette opération, l'on trouvera 22# 17ß pour le produit de 1ß multiplié par 457.

EXEMPLE II.

On propoſe de multiplier	0#	18ß
Par	457	
Produit	411#	6ß

1°. On multipliera 18ß par le chiffre 7 des unités du multiplicateur. Mais comme il ſeroit trop difficile de faire cette multiplication en une ſeule fois, on multipliera d'abord 8ß par 7, ce qui donnera 56ß dont on écrira le chiffre 6 au rang des ſols, & l'on retiendra les 5 dixaines de ſols. Enſuite on multipliera la dixaine de ſols par 7, & l'on aura pour le produit 7 dixaines

de ſols que l'on joindra avec les 5 dixaines qu'on a retenues, ce qui fera 12 dixaines de ſols qui valent 6^{liv}: ainſi l'on n'aura rien à écrire au rang des dixaines de ſols, & l'on retiendra 6^{liv} pour les joindre avec les livres qu'on va trouver.

2°. On multipliera la moitié du nombre des ſols, c'eſt-à-dire 9^{ſ} par les deux autres chiffres 45 du multiplicateur, en reculant d'un rang vers la droite les chiffres du produit; & ajoûtant à ce produit, en le faiſant, les 6^{liv} qu'on a retenues, on aura 411^{liv}: enſorte que 411^{liv} 6^{ſ} ſera le produit total de 18^{ſ} multipliés par 457.

Exemple III.

On propoſe de multiplier	0^{liv}	17^{ſ}
Par	457	
	365	19
	22	10
Produit	388^{liv}	9^{ſ}

1°. On multipliera 17^{ſ} par le chiffre 7 des unités du multiplicateur, ce qui donnera 5^{liv} 19^{ſ} dont la partie 19^{ſ} ſera miſe dans le rang des ſols, en retenant la partie 5^{liv}.

2°. On multipliera par les deux autres chiffres 45 du multiplicateur, la moitié du nombre des ſols, c'eſt-à-dire 8 $\frac{1}{2}$; mais on ne pourra faire cette opération qu'en deux fois, & l'on commencera par multiplier 8 par 45, en reculant d'un rang les chiffres du produit, ce qui, avec les 5^{liv} qu'on a retenues, donnera 365^{liv}.

Pour achever de multiplier la moitié de 17, c'eſt-à-dire 8 $\frac{1}{2}$ par 45, il faut encore multiplier $\frac{1}{2}$ par 45, c'eſt-à-dire qu'il faut prendre la moitié de 45 con-

ſideré comme un nombre de livres, ce qui donnera 22ᵗ 10ˢ.

Par cette opération, l'on trouve le produit de 17ˢ multipliés par 457, en deux parties dont la ſomme eſt 388ᵗ 9ˢ.

REMARQUE.

Pour peu que l'on faſſe attention aux trois exemples que nous venons de propoſer, l'on remarquera aiſément que ſi le nombre des ſols qu'on doit multiplier par un nombre entier eſt pair, on aura toûjours le produit en livres & ſols, ſans être obligé de faire aucune addition; au lieu que ſi le nombre des ſols eſt impair & plus grand que l'unité, on ne pourra avoir les livres & les ſols du produit qu'en deux parties qu'il faudra additionner; car dans ce cas la moitié du nombre des ſols ſera compoſée de deux parties, d'un nombre entier & de la fraction $\frac{1}{2}$.

La Méthode qu'on vient d'expliquer pour multiplier les ſols par un nombre entier, peut aiſément s'appliquer à la multiplication des deniers par un nombre entier, lorſque le nombre des deniers eſt une partie aliquote du ſol, ou de 12 deniers. Quoique cette application ne ſoit qu'un corollaire naturel de la regle que nous venons d'expliquer, nous la propoſerons comme une Méthode particuliere à la multiplication des deniers.

Méthode

87 *Pour multiplier les deniers par des nombres entiers, & pour avoir tout d'un coup les livres, les ſols & les deniers que le produit peut contenir.*

On diviſera le chiffre des unités du multiplicateur conſideré comme un nombre de livres, par le nombre de fois que les deniers ſont contenus dans

dans un ſol, & l'on mettra le quotient au rang des ſols & des deniers s'il y en a. Enſuite on diviſera les autres chiffres du multiplicateur par le double du nombre de fois que les deniers du multiplicande ſont contenus dans le ſol; & le quotient étant reculé d'un rang vers la droite, exprimera des livres & des parties de livres s'il y en a.

EXEMPLE PREMIER.

Si l'on veut multiplier	0^{liv}	0^{s}	3^{d}
Par	457		
On aura pour le produit	5^{liv}	14^{s}	3^{d}

Les 3 deniers qui ſont au multiplicande étant le quart de 1^{s}, il faudra prendre le quart du chiffre des unités du multiplicateur conſidéré comme un nombre de livres, & prendre la moitié du quart ou le huitiéme des autres chiffres du multiplicateur; c'eſt-à-dire qu'il faudra diviſer le chiffre 7 des unités par 4, & diviſer les autres par 8. Mais comme dans la diviſion, il faut commencer par diviſer les chiffres du degré le plus élevé, afin que les reſtes puiſſent être réduits & joints aux chiffres ſuivans; nous commencerons par prendre le huitiéme des chiffres du multiplicateur qui précédent celui des unités; & nous reculerons d'un rang vers la droite les chiffres du produit, pour exprimer le nombre des livres.

On prendra donc la huitiéme partie de 45 qui eſt 5 que l'on écrira au rang des livres; il reſtera 5 qui avec le chiffre ſuivant 7, fera 57 dont on prendra la quatriéme partie qui eſt $14\frac{1}{4}$ qu'on écrira aux rangs des ſols & deniers ſous cette forme 14^{s} 3^{d}.

On aura donc 5^{liv} 14^{s} 3^{d} pour le produit de 3^{d} multipliés par 457.

Exemple II.

On propoſe de multiplier	0#	0ß	8d.
Par	457		
Produit	15#	4ß	8d.

Les 8 deniers qui ſont au multiplicande, étant les deux tiers d'un ſol, il faudra prendre les deux tiers du chiffre des unités du multiplicateur, ou le tiers du double du chiffre 7 des unités du multiplicateur, & ne prendre que le tiers des autres chiffres du multiplicateur ; mais comme cette opération eſt une diviſion, il faudra commencer par les chiffres du degré le plus élevé, & n'en prendre que le tiers en reculant le quotient d'un rang.

Le tiers de 45 étant 15, on écrira 15 au rang des livres. Il faut maintenant prendre les deux tiers de 7, ou le tiers de 14 double de 7 ; ce qui donnera $4\frac{2}{3}$ que l'on écrira aux rangs des ſols & deniers ſous cette forme 4ß 8d.

Ainſi 15# 4ß 8d. ſera le produit de 8d. multipliés par 457.

Exemple III.

On propoſe de multiplier	0#	0ß	11d.
Par	457		
Pour 8d.	15	4	8
Pour 3d.	5	14	3
Produit total	20#	18ß	11d.

Comme les 11 deniers du multiplicande ne ſont pas une partie aliquote du ſol, l'on partagera 11

deniers en deux parties qui ſoient des parties aliquotes ou du moins des fractions commodes du ſol. Ces deux parties ſeront 8 deniers & 3 deniers, que l'on multipliera ſéparément par 457.

1°. En multipliant 8^{d} par 457, on trouvera comme dans le ſecond exemple $15^{\#}\ 4^{s}\ 8^{d}$ pour le produit.

2°. En multipliant 3 deniers par 457, on trouvera comme dans le premier exemple $5^{\#}\ 14^{s}\ 3^{d}$.

3°. Ajoûtant enſemble ces deux produits, l'on trouvera $20^{\#}\ 18^{s}\ 11^{d}$ pour le produit de 11 deniers multipliés par 457.

REMARQUE.

88 Lorſqu'on aura un nombre complexe compoſé de livres, ſols & deniers, tel que celui-ci $189^{\#}\ 18^{s}\ 11^{d}$, à multiplier par un nombre entier, par exemple par 457; les regles que nous avons expliquées pour la multiplication des nombres incomplexes, donneront le produit du nombre entier $189^{\#}$ multiplié par 457; la Méthode que nous avons expliquée pour la multiplication des ſols, nous fera trouver le produit de 18^{s} multipliés par 457: enfin la Méthode que nous venons de donner pour la multiplication des deniers, nous fera trouver le produit de 11^{d} multipliés par 457. Nous avons donc aſſez de méthodes pour multiplier un nombre complexe compoſé de livres, ſols & deniers, par un nombre entier.

Si le multiplicateur contenoit encore une fraction, par exemple ſi le multiplicateur étoit $457\frac{3}{5}$; après avoir multiplié le multiplicande entier $189^{\#}\ 18^{s}\ 11^{d}$ par 457, il faudroit encore le multiplier par $\frac{3}{5}$, c'eſt-à-dire qu'il faudroit prendre encore 3 fois le cin-

quiéme du multiplicande, ce qui donneroit de nouvelles parties au produit.

Enfin toutes les parties du produit étant trouvées, on les ajoûtera enſemble pour avoir le produit total de la multiplication.

Démonstration.

Des deux Méthodes que l'on a propoſées pour multiplier les ſols & les deniers.

1°. En multipliant le nombre des ſols par le dernier chiffre du multiplicateur, on a évidemment un nombre de ſols: ainſi le produit qu'on trouve doit être mis au rang des ſols, lorſqu'il ne ſurpaſſe pas 20ß; & lorſqu'il ſurpaſſe 20ß, il faut retenir une livre pour chaque vingtaine de ſols, & écrire le reſte au rang des ſols. Cette premiere opération eſt évidente, & celle qu'on fait ſur les autres chiffres du multiplicateur n'eſt guère plus difficile à comprendre, comme on va le voir.

On multiplie tous les autres chiffres du multiplicateur par la moitié du nombre des ſols, & l'on recule d'une place chaque chiffre du produit. Mais 1°. en multipliant par la moitié du nombre des ſols, l'on a un produit qui n'eſt que la moitié de celui qu'on auroit en multipliant par tous les ſols. 2°. En reculant d'un rang vers la droite chaque chiffre de ce produit, l'on n'a que la dixiéme partie de ce produit, & par conſéquent l'on n'a que la dixiéme partie de la moitié du produit qu'on auroit en multipliant à l'ordinaire ces chiffres par tout le nombre des ſols; mais la dixiéme partie de la moitié de ce produit, c'eſt-à-dire la vingtiéme partie de ce produit eſt égale au nombre de livres qu'il contient.

Donc en multipliant par la moitié du nombre des ſols tous les chiffres du multiplicateur, excepté celui des unités, & en reculant d'une place chaque chiffre du produit; l'on a un produit égal au nombre de livres contenues dans le produit de ſols qu'on auroit en multipliant ces chiffres à l'ordinaire par le nombre des ſols.

2°. Suivant cette regle, ſi le multiplicande ne contient que 1ß, l'on ne prendra que 1 fois le chiffre des unités du multiplicateur pour en faire des ſols, & l'on ne prendra que la moitié des autres chiffres du multiplicateur conſidérés comme livres, en reculant d'un rang chaque chiffre du produit: & comme pour la moitié, le quart, le tiers, le ſixiéme, ou le douziéme de 1ß, l'on ne doit prendre que la moitié, le quart, le tiers, le ſixiéme, ou le douziéme de ce que l'on prendroit pour 1ß; il eſt clair que pour la moitié, le quart, le tiers, le ſixiéme, ou le douziéme de 1ß, l'on ne doit prendre que la moitié, le quart, le tiers, le ſixiéme, ou le douziéme du chiffre des unités du multiplicateur, pour le porter aux ſols; & que l'on ne doit prendre que la moitié de la moitié, ou du quart, ou du tiers, ou du ſixiéme, ou du douziéme des autres chiffres du multiplicateur conſidérés comme livres, en reculant d'un rang chaque chiffre du produit; c'eſt-à-dire qu'on doit diviſer le chiffre des unités du multiplicateur par le nombre de fois que les deniers du multiplicande ſont contenus dans 1ß, & diviſer les autres chiffres du même multiplicateur conſidérés comme livres, par le double du nombre de fois que les deniers du multiplicande ſont contenus dans un ſol, en reculant d'un rang chaque chiffre du produit: & c'eſt ce que nous avons fait dans la Méthode que nous avons propoſée pour multiplier les deniers.

PROBLÉME.

89 *Multiplier des Poids tels que* 24^M 70 6G
Par 51

	1	24^M		
	50	120		
Produits	40	25	40	
particuliers	20	12	6	
pour	10	6	3	
	4^G	3	1	4^G
	2^G	1	4	6
Produit total		1273^M	30	2G

1°. On multipliera 24 *marcs* par 51, ſuivant les regles qu'on a expliquées pour la multiplication des quantités incomplexes : ce qui donnera deux produits particuliers, ſavoir, 24^M & 1200^M.

2°. Pour multiplier 7 *onces* par 51, l'on partagera 7^G en trois parties, 4^G, 2^G, 1^G aliquotes du marc qui contient 80; & parce que ſi l'on multiplioit 1 *marc* par 51, l'on auroit un nombre de *marcs* égal au multiplicateur 51; lorſqu'on multipliera par 40 qui n'eſt que la moitié d'un *marc*, l'on n'aura qu'un nombre de *marcs*, égal à la moitié du multiplicateur 51.

Pour 4 *onces*, l'on prendra donc la moitié de 51 *marcs*, ſavoir, 25 *marcs* $\frac{1}{2}$ ou 25 *marcs* 4 *onces*.

Pour 2 *onces* qui ne ſont que le quart d'un *marc* ou la moitié de 4 *onces*, l'on ne prendra que le quart du multiplicateur conſidéré comme 51 *marcs*, ou la moitié du produit 25^M 40 qu'on a trouvé pour 4 *onces*; & l'on aura 12^M 60.

Pour 1 *once* qui n'eſt que le huitiéme d'un *marc*

ou le quart de 4 *onces*, ou la moitié de 2 *onces*, on prendra le huitiéme du multiplicateur conſidéré comme 51 *marcs*, ou le quart du produit 25^{M} 40 qu'on a trouvé pour 4 *onces*, ou la moitié du produit 12^{M} 60 qu'on a trouvé pour 2 *onces*; & l'on aura 6^{M} 30.

3°. Comme nous avons le produit de 1 *once* multiplié par 51, nous partagerons en parties aliquotes de l'once, les 6 *gros* que nous devons multiplier; & ces parties aliquotes ſeront 4 *gros* & 2 *gros*.

Pour 4 *gros* qui ſont la moitié de 1 *once*, nous prendrons la moitié du produit 6^{M} 30 que nous avons trouvé pour 1 *once*; & nous aurons 3^{M} 10 4^{G}.

Pour 2 *gros*, nous prendrons la moitié du produit précédent 3^{M} 10 4^{G} que nous venons de trouver pour 4 *gros*; & nous aurons 1^{M} 40 6^{G}.

Toutes les parties du produit étant ainſi trouvées, on les ajoûtera enſemble; & l'on aura 1273^{M} 30 2^{G} pour le produit demandé.

Avertiſſement.

Juſqu'ici nous n'avons parlé que de la multiplication Arithmétique dont le multiplicateur doit être un nombre abſtrait, & dont le produit doit par conſéquent avoir des unités de même eſpece que celles du multiplicande. Nous allons maintenant traiter de la multiplication Géométrique que nous nommons ainſi, parce qu'elle eſt relative à l'étendue qui eſt l'objet de la Géométrie.

L'un des facteurs de la multiplication géométrique, peut être une ligne ou une ſurface; l'autre fac-

teur doit toûjours être une ligne; & l'eſpece du produit, eſt toûjours différente de celles de ſes facteurs.

Si les deux facteurs de la multiplication ſont des lignes, leur produit ſera une ſurface; & l'un des facteurs étant une ligne, ſi l'autre facteur eſt une ſurface, le produit ſera un ſolide.

Les deux facteurs étendus que l'on doit multiplier l'un par l'autre, ſe réduiſent en meſures de même eſpece que ces étendues; & l'on donne à leur multiplication, des noms dérivés de ceux des meſures qui ſervent d'unités à ces étendues.

Si les deux facteurs étendus de la multiplication ſont réduits en toiſes, ou en pieds, ou en pouces, &c, qui ne ſont que des parties de la toiſe, on donne à la multiplication le nom de *Toiſé.*

Si les deux facteurs de la multiplication étoient des aunes ou des parties relatives à l'aune, on donneroit à la multiplication le nom d'*Aunage.*

Si les deux facteurs de la multiplication étoient des perches ou d'autres meſures relatives à l'arpent qui contient cent perches quarrées, on donneroit à la multiplication le nom d'*Arpentage.*

Comme l'aune, la perche, & les autres meſures dont nous faiſons uſage, ſont relatives à la toiſe qui tient le premier rang parmi nos meſures, & qu'il ſera facile d'appliquer à d'autres meſures ce que nous allons dire de la toiſe, ou de la multiplication des lignes & des ſurfaces meſurées en toiſes; nous nous contenterons d'expliquer le toiſé.

DU TOISÉ.

90 On appelle *Toiſé* l'art de meſurer des étendues des lignes, des ſuperficies, & des ſolides, par le moyen de la toiſe ou des autres meſures qui ont rapport à la toiſe.

Meſurer à la toiſe, c'eſt chercher combien de fois la toiſe & ſes parties ſont contenues dans l'étendue qu'on veut meſurer.

Comme les meſures contenues dans une étendue, ſont des parties de cette étendue, & ſont par conſéquent de même eſpece qu'elle; on eſt obligé de conſidérer trois eſpeces de toiſes, pour meſurer les trois différentes eſpeces d'étendue. On conſidére des toiſes linéaires pour meſurer les diſtances & toutes les lignes; des toiſes ſuperficielles, pour meſurer les ſuperficies; & des toiſes ſolides, pour meſurer les ſolides.

On démontre en Géométrie qu'un parallélogramme eſt égal au produit de ſa baſe multipliée par ſa largeur ou hauteur; par exemple qu'un parallélogramme dont la baſe a 6 toiſes de long, & dont la largeur ou hauteur eſt de 5 toiſes, contient 5 fois 6 toiſes, ou 30 toiſes quarrées dans ſa ſuperficie. On démontre auſſi qu'un parallélépipede eſt égal au produit de la ſuperficie de ſa baſe multipliée par ſa hauteur; par exemple qu'un ſolide dont la baſe eſt un parallélogramme de 6 toiſes de long ſur 5 toiſes de large, & dont la hauteur eſt de 4 toiſes, contient 120 toiſes cubes, parce que la baſe ayant 6 toiſes de long ſur 5 toiſes de large, contient 30 toiſes quarrées de ſuperficie, & que 30 toiſes de ſuperficie multipliées par 4 toiſes produiſent 120 toiſes cubes.

Comme ces deux propoſitions ſont le fondement du toiſé, l'on ne peut pas ſe diſpenſer d'en faire voir la vérité, du moins dans les parallélogrammes rectangles qu'on appelle communément quarrés longs, & dans les parallélépipedes rectangles.

I.

Fig. 1. 91 Soit un quarré long *ABCD*, dont la baſe *BC* & la hauteur *AB* ſoient meſurées avec la toiſe linéaire, qu'on appelle ſimplement *toiſe*; que *BG*, *GI*, *IL*, *LN*, *NP*, *PC*, ſoient les toiſes contenues dans la baſe *BC*, & que *AQ*, *QR*, *RS*, *ST*, *TB*, ſoient les toiſes contenues dans la largeur ou hauteur *AB*. Si par les points *G*, *I*, *L*, *N*, *P*, de la baſe, on mene à la hauteur *AB* des paralleles *GF*, *IH*, *LK*, *NM*, *PO*; l'on diviſera le quarré long *ABCD* en autant de rectangles *ABGF*, *FGIH*, *HILK*, *KLNM*, *MNPO*, *OPCD*, qu'il y aura de toiſes dans la baſe *BC*.

Chacun de ces rectangles ayant une toiſe de large, & ayant de longueur autant de toiſes qu'il y en a dans la hauteur *AB* du quarré long, contiendra évidemment autant de toiſes quarrées qu'il y a de toiſes linéaires dans la hauteur *AB*. Ainſi pour avoir le nombre des toiſes quarrées contenues dans le quarré long *ABCD*, il faudra prendre le nombre des rectangles *ABGF*, *FGIH*, *HILK*, *&c* qui ſont apuyés ſur la baſe *BC*, ou le nombre des toiſes linéaires *BG*, *GI*, *&c* contenues dans la baſe *BC*, autant de fois qu'il y aura de toiſes quarrées dans chacun de ces rectangles, c'eſt-à-dire autant de fois qu'il y aura de toiſes linéaires dans la hauteur *AB*.

Mais prendre le nombre des toiſes linéaires qui ſont dans la baſe *BC* du rectangle, autant de fois qu'il y a de toiſes linéaires dans la hauteur *AB* de ce rectangle,

c'eſt multiplier le nombre des toiſes linéaires de la baſe *BC*, par le nombre des toiſes linéaires de la hauteur ou largeur *AB*.

Donc on aura le nombre des toiſes quarrées contenues dans un quarré long, en multipliant le nombre des toiſes linéaires de ſa baſe par le nombre des toiſes linéaires de ſa hauteur ou largeur.

Par exemple ſi la baſe *BC* du quarré long *ABCD* a 6 toiſes de long, & ſi ſa hauteur *AB* eſt de 5 toiſes, le quarré long *ABCD* contiendra 6 rectangles, *ABGF*, *FGIH*, *HILK*, *KLNM*, *MNPO*, *OPCD*, qui auront chacun 5 toiſes de long ſur une toiſe de large, & qui contiendront par conſéquent chacun 5 toiſes quarrées. Ainſi le quarré long contiendra 6 fois 5 toiſes quarrées, qui font 30 toiſes quarrées.

Il eſt évident que ſi l'on avoit meſuré en pieds linéaires la baſe *BC* & la hauteur *AB* du quarré long, on auroit autant de bandes d'un pied de large qu'on trouveroit de pieds dans la baſe *BC*, & que chaque bande contiendroit autant de pieds quarrés qu'il y auroit de pieds linéaires dans la hauteur *AB* du quarré long *ABCD*. Ainſi en multipliant le nombre des pieds linéaires contenus dans la baſe *BC* d'un quarré long *ABCD*, par le nombre des pieds contenus dans ſa hauteur *AB*, l'on aura le nombre des pieds quarrés contenus dans la ſuperficie du quarré long *ABCD*.

Par exemple la toiſe quarrée ayant une toiſe de long ſur une toiſe de large, ſa baſe & ſa hauteur auront chacune 6 pieds linéaires de longueur. Ainſi ſa ſuperficie contiendra 6 bandes de 6 pieds quarrés chacune, c'eſt-à-dire 6 fois 6 pieds quarrés ou 36 pieds quarrés. Fig. 2.

Si le quarré *ABCD* repréſentoit un pied quarré,

ſa baſe *BC* ſeroit de 12 pouces linéaires, & ſa hauteur *AB* ſeroit pareillement de 12 pouces linéaires. Ainſi ſa ſurface ſeroit de 12 fois 12 pouces quarrés, ou de 144 pouces quarrés.

Par la même raiſon, un pouce quarré dont la baſe & la hauteur ont chacune 12 lignes linéaires, contient 12 fois 12 lignes quarrées: & ainſi des autres.

Il arrive ſouvent qu'on ne prend pas les mêmes meſures pour meſurer la baſe & la hauteur du quarré long. Dans ce cas, les meſures ſuperficielles contenues dans la ſurface du quarré long, ne ſont pas des meſures quarrées, mais des meſures qui ont pour longueur la meſure qu'on a priſe pour meſurer la baſe, & pour largeur la meſure qui a ſervi à meſurer la hauteur.

Fig. 3. Par exemple ſi l'on veut ſavoir le nombre des briques poſées à plat qui ſont contenues dans un quarré long: comme une brique a 8 pouces de long ſur 4 pouces de large, on meſurera la longueur *BC* avec une meſure qui aura 8 pouces de long, & l'on meſurera la hauteur ou largeur *AB* du quarré long avec une meſure qui n'aura que 4 pouces; puis on multipliera le nombre des meſures de 8 pouces contenues dans la baſe *BC*, par le nombre des meſures de 4 pouces contenues dans la hauteur *AB*; & le produit ſera le nombre des briques, ou des meſures ſuperficielles de 8 pouces de long & de 4 pouces de large, contenues dans l'aire du quarré long *ABCD*.

Lorſqu'on meſure à la toiſe la longueur & la largeur d'un quarré long, l'on ne trouve pas toûjours que la toiſe y ſoit contenue un certain nombre de fois ſans reſte; & l'on eſt obligé de meſurer ce reſte en partie de la toiſe, ſavoir en pieds, pouces, lignes, &c. & comme les produits de ces meſures ne donnent par conſéquent pas toûjours des toiſes quarrées ſans reſte,

on eſt auſſi obligé d'évaluer ce reſte en parties de la toiſe quarrée.

Quoique les parties les plus régulieres de la toiſe quarrée, ſoient des pieds quarrés, des pouces quarrés, & des lignes quarrées ; ce ne ſont point cependant ces parties que l'on emploie le plus ordinairement, & l'on aime mieux partager la toiſe quarrée en parties analogues à la toiſe linéaire. Ainſi de même que la toiſe linéaire eſt partagée en 6 pieds linéaires, que le pied linéaire eſt partagé en 12 pouces linéaires, & le pouce linéaire en 12 lignes linéaires ; l'on partage la toiſe quarrée en 6 rectangles de 1 pied de large & de 1 toiſe de long, qu'on devroit nommer des *pied-toiſe* ou des *toiſe-pied* à cauſe de leurs deux dimenſions ; l'on partage le rectangle *toiſe-pied* en douze parties égales qui ont chacune 1 toiſe de long & 1 pouce de large, & que l'on devroit nommer des *toiſe-pouce* ; enfin l'on diviſe chacun de ces nouveaux rectangles en 12 parties égales qui ont chacune 1 toiſe de long & 1 ligne de large, & qu'on devroit appeller des *toiſe-ligne* à cauſe des deux dimenſions qu'elles ont : & ainſi des autres meſures dont la toiſe eſt la dimenſion principale.

Lorſqu'on meſurera les côtés d'un quarré long au pied linéaire, on ne trouvera pas toûjours que le pied y ſoit contenu un certain nombre de fois ſans reſte ; & l'on meſurera ce reſte en pouces & en lignes. Dans ce cas, le produit des deux dimenſions meſurées ne donnera pas toûjours un nombre juſte de pieds quarrés ſans reſte ; & il faudra avoir recours aux parties du pied quarré pour meſurer ce reſte.

Les parties du pied quarré les plus régulieres relativement à la diviſion du pied en pouces & lignes, ſont le pouce quarré & la ligne quarrée. Mais comme il faut 144 pouces quarrés pour un pied quarré, & 144 lignes quarrées pour 1 pouce quarré ; & que le

pied linéaire n'eſt diviſé qu'en 12 pouces & le pouce linéaire en 12 lignes, on aime mieux renoncer à la régularité des parties quarrées du pied, & diviſer le pied quarré en 12 parties égales qui ont chacune 1 pied de long ſur 1 pouce de large, & qu'on devroit nommer des *pied-pouce* à cauſe des deux dimenſions qu'elles ont.

On diviſe pareillement le *pied-pouce*, comme le pouce linéaire, en 12 parties égales, qui ont chacune 1 pied de long ſur 1 ligne de large, & que pour cette raiſon l'on devroit appeller des *pied-ligne*.

Il eſt évident, par ce qui vient d'être dit, que deux nombres de meſures linéaires égales, multipliés l'un par l'autre, produiſent un nombre de meſures ſuperficielles quarrées, qui ont pour côtés les meſures linéaires qui ſont au multiplicateur & au multiplicande. Par exemple un nombre de toiſes linéaires, multiplié par un nombre de toiſes linéaires, produit toûjours un nombre de toiſes quarrées; un nombre de pieds linéaires, multiplié par un nombre de pieds linéaires, produit un nombre de pieds quarrés: & ainſi des autres.

Il eſt clair auſſi qu'un nombres de meſures linéaires égales, multiplié par un nombre d'autres meſures linéaires égales, mais différentes des premieres, produit un nombre de meſures ſuperficielles qui ont pour côtés contigus les deux ſortes de meſures du multiplicande & du multiplicateur. Par exemple un nombre de toiſes linéaires, multiplié par un nombre de pieds linéaires, produira un nombre de meſures ſuperficielles qui auront une toiſe de long ſur 1 pied de large; un nombre de toiſes linéaires, multiplié par un nombre de pouces ou de lignes linéaires, produira un nombre de meſures ſuperficielles qui auront chacune 1 toiſe de long ſur 1 pouce, ou ſur une ligne de large; un nombre de pieds linéaires, multiplié par un nom-

bre de pouces & de lignes linéaires, produira un nombre de meſures ſuperficielles qui auront chacun 1 pied de long ſur 1 pouce, ou ſur 1 ligne de large : & ainſi des autres.

II.

92 Soit un parallélépipede rectangle $ABCDE$, dont la longueur AD, la largeur AB ou DC, & l'épaiſſeur DE, ſoient meſurées à la toiſe linéaire; & ſuppoſons que ce ſolide ſoit refendu par des plans paralleles HFI, KGH, en autant de ſolides égaux d'une toiſe d'épaiſſeur, qu'il y a de toiſes dans ſon épaiſſeur DE. Fig. 4.

Chaque ſolide tel que $ABCDF$ contenu entre deux plans paralleles $ABCD$, HFI, ayant une toiſe d'épaiſſeur ſuivant DF, contiendra autant de toiſes cubes qu'il y aura de toiſes quarrées dans la face rectangle $ABCD$; parce qu'on pourra placer une toiſe cube ſur chacune des toiſes quarrées de cette face; & que toutes les toiſes cubes qu'on placera ſur toutes ces toiſes quarrées, ſeront exactement contenues entre les deux plans paralleles $ABCD$, HFI, entre leſquels il y a une toiſe d'intervalle.

Mais nous venons de voir que la face $ABCD$ contient un nombre de toiſes quarrées égal au produit de ſa longueur AD multipliée par ſa largeur AB ou DC. Donc chacun des ſolides d'une toiſe d'épaiſſeur, dans leſquels on a diviſé le parallélépipede $ABCDE$, contient un nombre de toiſes cubes, égal au produit de ſa longueur AD multipliée par ſa largeur DC. Et comme il y a dans le parallélépipede $ABCDE$ autant de ces ſolides d'une toiſe d'épaiſſeur, qu'il y a de toiſes dans ſon épaiſſeur DE; on aura le nombre des toiſes cubes contenues dans ce paral-

lélépipede rectangle *ABCDE*, en multipliant le produit de ſa longueur *AD* & de ſa largeur *DC*, meſurées en toiſes linéaires, par le nombre des toiſes contenues dans ſon épaiſſeur *DE*.

Par exemple ſi l'on ſuppoſe que la longueur *AD* ſoit de 6 toiſes;

Que la largeur *DC* ſoit de 5 toiſes;

Que l'épaiſſeur *DE* ſoit de 3 toiſes;

Le nombre des toiſes cubes contenues dans le ſolide *ABCDE*, ſera égal au produit des trois nombres 6, 5, 3; & ſera par conſéquent de 90 toiſes cubes.

Si au lieu de meſurer en toiſes linéaires, la longueur *AD*, la largeur *DC*, & l'épaiſſeur *DE* du parallélépipede *ABCDE*, l'on avoit meſuré ces trois dimenſions en pieds ou pouces ou lignes linéaires; il eſt évident qu'au lieu des toiſes cubes que l'on a trouvées dans ce parallélépipede, on auroit trouvé des pieds cubes, ou des pouces cubes, ou des lignes cubes.

La démonſtration de cette propoſition eſt préciſément la même que celle que nous venons de donner, & peut lui être appliquée, en mettant ſimplement le nom de pied, ou de pouce, ou de ligne, au lieu de celui de toiſe.

Une toiſe cube eſt un parallélépipede rectangle qui a 6 pieds de long, 6 pieds de large, & 6 pieds d'épaiſſeur. Ainſi le nombre des pieds cubes contenus dans une toiſe cube eſt égal au produit des trois nombres 6, 6, 6, multipliés enſemble; c'eſt-à-dire que la toiſe cube contient 216 pieds cubes.

Un pied cube eſt un parallélépipede rectangle qui a 12 pouces de long, 12 pouces de large, & 12 pouces d'épaiſſeur. Ainſi le pied cube contient un nombre de pouces cubes repréſentés par $12 \times 12 \times 12$, dont le produit

produit eſt 1728; c'eſt-à-dire que le pied cube contient 1728 pouces cubes.

Par la même raiſon, 1 pouce cube qui a 12 lignes de long, 12 lignes de large, & 12 lignes d'épaiſſeur, contient 1728 lignes cubes : & ainſi des autres.

Lorſqu'on meſure à la toiſe les dimenſions d'un parallélépipede rectangle, on ne trouve que rarement un nombre exact de toiſes linéaires dans ſa longueur, ſa largeur, & ſon épaiſſeur ; & il faut, pour meſurer le reſte qui eſt moindre qu'une toiſe, avoir recours aux parties de la toiſe, qui ſont le pied, le pouce, la ligne : ainſi le produit de ces trois dimenſions ne ſera pas ordinairement un nombre exact de toiſes cubes ſans reſte ; & il faudra évaluer ce reſte en parties de la toiſe cube.

Quoique le pied cube, le pouce cube, & la ligne cube, ſoient les parties les plus régulieres de la toiſe cube, relativement à la diviſion de la toiſe linéaire en pieds, pouces, lignes ; ce n'eſt point en parties de ces eſpeces qu'on évalue le plus ordinairement les parties des ſolides qui ſont moindres que la toiſe cube, lorſque la plus grande partie du ſolide eſt eſtimée en toiſes cubes ; & l'on aime mieux, pour la comodité du calcul, diviſer la toiſe cube en parties proportionnelles à celles de la toiſe linéaire.

On diviſe donc la toiſe cube en ſix parallélépipedes égaux qui ont chacun 1 toiſe de long, 1 toiſe de large, & 1 pied de haut, & qui à cauſe de leurs trois dimenſions, devroient s'appeller des *toiſe-toiſe-pied.*

On diviſe une *toiſe-toiſe-pied*, ou la ſixiéme partie de la toiſe cube, en 12 parties égales qui ont chacune 1 toiſe quarrée de baſe, c'eſt-à-dire 1 toiſe de long & 1 toiſe de large ſur 1 pouce d'épaiſſeur, & qui à cauſe de cela devroient ſe nommer des *toiſe-toiſe-pouce.*

On divise aussi la *toise-toise-pouce*, ou la douzième partie de la sixième partie de la toise cube, en 12 parties égales qui ont chacune 1 toise quarrée de base sur 1 ligne d'épaisseur, & qui à cause de leurs trois dimensions devroient être nommées des *toise-toise-ligne*; & ainsi des autres.

Lorsqu'on mesure les trois dimensions d'un parallélépipede au pied linéaire, & que le pied n'y est pas contenu un certain nombre de fois sans reste; on mesure le reste en pouces & lignes qui sont parties aliquotes du pied qu'on a pris pour la mesure principale. Dans ce cas, le solide du parallélépipede contient un certain nombre de pieds cubes, avec un reste qu'on évalue en parties du pied cube. Pour cela, on divise le pied cube en 12 parties égales, comme le pied linéaire; & ces parties qui ont 1 pied de long, 1 pied de large, & 1 pouce d'épaisseur, devroient s'appeller des *pied-pied-pouce*; c'est-à-dire qu'elles devroient porter le nom des trois dimensions qu'elles ont. On sous-divise ensuite le *pied-pied-pouce* en 12 parties égales qui ont chacune 1 pied de long, 1 pied de large, & 1 ligne d'épaisseur, & qui devroient se nommer des *pied-pied-ligne*, pour les distinguer par leurs trois dimensions.

Enfin lorsqu'on mesure un solide avec des mesures quelconques, l'usage est de prendre des mesures cubiques pour les mesures principales du solide; & pour mesurer la partie qui est plus petite qu'une mesure solide principale, on prend d'autres mesures plus petites, en sous-divisant la mesure cubique principale en autant de parties égales, que la mesure linéaire en a; ensorte que les mesures solides qui résultent de ces divisions, ont toutes des dimensions égales à celles de la mesure principale.

On peut donc conclure de ce qui vient d'être dit,

qu'un nombre de meſures ſuperficielles égales, de longueur & de largeur quelconques, multiplié par un nombre de meſures linéaires de longueur quelconque, produit un nombre de meſures ſolides, qui ont pour leurs trois dimenſions la longueur & la largeur d'une meſure ſuperficielle du multiplicandé, & la longueur d'une meſure du multiplicateur ; ou qui ont pour baſes des meſures du multiplicande, & pour hauteur des meſures du multiplicateur.

Par exemple ſi l'on multiplie un nombre de toiſes quarrées, qui ont 1 toiſe de long ſur 1 toiſe de large, par un nombre de toiſes linéaires, le produit ſera compoſé d'un nombre de meſures ſolides qui auront 1 toiſe de long, 1 toiſe de large, & 1 toiſe d'épaiſſeur ; c'eſt-à-dire qui auront 1 toiſe quarrée de baſe ſur 1 toiſe de hauteur, & qui ſeront par conſéquent des toiſes cubes.

Si l'on multiplie un nombre de toiſes quarrées par un nombre de pieds, ou de pouces, ou de lignes linéaires, le produit contiendra un nombre de meſures ſolides qui auront chacune 1 toiſe quarrée de baſe, ſur 1 pied ou 1 pouce ou 1 ligne de hauteur ; c'eſt-à-dire qui auront 1 toiſe de long, 1 toiſe de large, & 1 pied ou 1 pouce ou 1 ligne d'épaiſſeur.

Si l'on multiplioit un nombre de meſures ſuperficielles qui euſſent deux dimenſions différentes, par des meſures linéaires encore différentes de ces dimenſions ; par exemple ſi l'on multiplioit un nombre de meſures ſuperficielles de 8 pouces de long ſur 4 pouces de large, par un nombre de meſures linéaires de 2 pouces ; on auroit pour le produit un nombre de meſures ſolides chacune de 8 pouces de long, 4 pouces de large, & 2 pouces d'épaiſſeur, ſemblables à des briques : & ainſi des autres.

Valeur des différentes unités relatives à la Toiſe linéaire, à la Toiſe quarrée, & à la Toiſe cubique, avec les caracteres diſtinctifs de ces différentes unités.

Pour les Mesures linéaires.

T	*ſignifie*	toiſe	$1T$	*vaut*	$6P$
P		pied	$1P$		$12p$
p		pouce	$1p$		$12L$
L		ligne	$1L$		12^{I}
I		point *ou* prime			

Pour les Mesures superficielles.

TT		toiſe quarrée	$1TT$	$36PP$	
PP		pied quarré	$1PP$	$144pp$	
pp		pouce quarré	$1pp$	$144LL$	
LL		ligne quarrée			
			$1TT$	$6TP$	
TP		toiſe-pied	$1TP$	$12Tp$ *ou*	$6PP$
Tp		toiſe-pouce	$1Tp$	$12TL$ *ou*	$\frac{1}{2}PP$
TL		toiſe-ligne	$1TL$	$12T^{I}$ *ou*	$6pp$
T^{I}		toiſe-prime	$1T^{I}$	$12T^{II}$ *ou*	$\frac{1}{2}pp$
T^{II}		toiſe-ſeconde	$1T^{II}$	$12T^{III}$ *ou*	$6LL$
T^{III}		toiſe-tierce	$1T^{III}$		$\frac{1}{2}LL$
			$1PP$	$12Pp$	
Pp		pied-pouce	$1Pp$	$12PL$ *ou*	$12pp$
PL		pied-ligne	$1PL$	$12P^{I}$ *ou*	$1pp$
P^{I}		pied-prime	$1P^{I}$	$12P^{II}$ *ou*	$12LL$
P^{II}		pied-ſeconde	$1P^{II}$		$1LL$
			$1pp$	$12pL$	
pL		pouce-ligne	$1pL$	$12p^{I}$ *ou*	$12LL$
p^{I}		pouce-prime	$1p^{I}$		$1LL$

POUR LES MESURES SOLIDES.

TTT	*signifie* toise cube	$1TTT$	*vaut*	$216PPP$
PPP	pied cube	$1PPP$		$1728ppp$
ppp	pouce cube	$1ppp$		$1728LLL$
LLL	ligne cube			
		$1TTT$	$6TTP$	
TTP	toise-toise-pied	$1TTP$	$12TTp$ *ou*	$36PPP$
TTp	toise-toise-pouce	$1TTp$	$12TTL$	$3PPP$
TTL	toise-toise-ligne	$1TTL$	$12TT^{I}$	$\frac{1}{4}PPP$
TT^{I}	toise-toise-prime	$1TT^{I}$	$12TT^{II}$	$36ppp$
TT^{II}	toise-toise-seconde	$1TT^{II}$	$12TT^{III}$	$3ppp$
TT^{III}	toise-toise-tierce	$1TT^{III}$	$12TT^{IV}$	$\frac{1}{4}ppp$
TT^{IV}	toise-toise-quarte	$1TT^{IV}$	$12TT^{V}$	$36LLL$
TT^{V}	toise-toise-quinte	$1TT^{V}$	$12TT^{VI}$	$3LLL$
TT^{VI}	toise-toise-sixte	$1TT^{VI}$		$\frac{1}{4}LLL$
		$1PPP$	$12PPp$	
PPp	pied-pied-pouce	$1PPp$	$12PPL$	$144ppp$
PPL	pied-pied-ligne	$1PPL$	$12PP^{I}$	$12ppp$
PP^{I}	pied-pied-prime	$1PP^{I}$	$12PP^{II}$	$1ppp$
PP^{II}	pied-pied-seconde	$1PP^{II}$	$12PP^{III}$	$144LLL$
PP^{III}	pied-pied-tierce	$1PP^{III}$	$12PP^{IV}$	$12LLL$
PP^{IV}	pied-pied-quarte	$1PP^{IV}$		$1LLL$
		$1ppp$	$12ppL$	
ppL	pouce-pouce-ligne	$1ppL$	$12pp^{I}$	$144LLL$
pp^{I}	pouce-pouce-prime	$1pp^{I}$	$12pp^{II}$	$12LLL$
pp^{II}	pouce-pouce-seconde	$1pp^{II}$		$1LLL$
TPP	toise-pied-pied	$1TPP$	$2TTp$	$6PPP$
TPp	toise-pied-pouce	$1TPp$	$2TTL$	$\frac{1}{2}PPP$
TPL	toise-pied-ligne	$1TPL$	$2TT^{I}$	$72ppp$
Tpp	toise-pouce-pouce	$1Tpp$	$2TT^{I}$	$72ppp$
TpL	toise-pouce-ligne	$1TpL$	$2TT^{II}$	$6ppp$
TLL	toise-ligne-ligne	$1TLL$	$2TT^{III}$	$\frac{1}{2}ppp$

PROBLÉME.

93

Multiplier	57^T	4^P	8^p	
Par	8^T	3^P	6^p	
Pour 8^T	462^{TT}	1^{TP}	4^{Tp}	
Pour 3^P	28	5	4	
Pour 6^p	4	4	10	8^{TL}
Produit total	495^{TT}	5^{TP}	6^{Tp}	8^{TL}

Quoiqu'on puiſſe regarder comme multiplicateur le facteur qu'on voudra ; nous prenons, pour la plus grande facilité, celui qui a le moins de chiffres au nombre des toiſes.

Lorſque le nombre des toiſes du multiplicateur, eſt exprimé par un ſeul chiffre, comme dans cet exemple ; on multiplie d'abord chaque partie du multiplicande, en commençant par les parties dont les unités ſont les plus petites, par le nombre des toiſes du multiplicateur, comme on va l'expliquer. Enſuite pour multiplier le multiplicande par les autres parties du multiplicateur, on prend des parties du multiplicande proportionnelles à ce que les parties du multiplicateur ſont relativement à la toiſe. Voici le détail des opérations.

1°. On multipliera 8 *pouces* par 8 *toiſes*, ce qui produira 64 *toiſe-pouce*. Comme ce nombre de *toiſe-pouce* contient 5 *toiſe-pied* & 4 *toiſe-pouce*, l'on écrira 4^{Tp} au-deſſous des pouces, & l'on retiendra 5^{TP} pour les joindre avec les *toiſe-pied* que l'on va trouver.

On multipliera 4^P par 8^T, ce qui produira 32^{TP}, qui avec les 5^{TP} qu'on a retenues feront 37^{TP}. Comme ce nombre de *toiſe-pied* contient 36^{TP} qui ſont 6 *toiſes quarrées*, avec 1^{TP} de plus, on écrira 1^{TP}

ſous les pieds, & l'on retiendra 6 *toiſes quarrées* pour les joindre avec les autres *toiſes quarrées* que l'on va trouver.

Enfin l'on multipliera 57 *toiſes* par 8 *toiſes*, ſuivant les regles qui ont été expliquées pour multiplier les nombres incomplexes par des nombres entiers, & l'on joindra au produit les 6 *toiſes quarrées* qu'on a retenues; ce qui produira en tout 462 *toiſes quarrées*. Ainſi $57^T\ 4^P\ 8p$ étant multipliés par 8^T, produiſent $462^{TT}\ 1^{TP}\ 4^{T}p$.

2°. Pour multiplier le même multiplicande $57^T\ 4^P\ 8p$ par la partie 3^P du multiplicateur, on remarquera que ſi ce multiplicande étoit multiplié par une *toiſe*, il produiroit $57^{TT}\ 4^{TP}\ 8^Tp$, c'eſt-à-dire qu'on auroit un produit égal au multiplicande, avec cette ſeule différence que chaque partie acquéreroit une dimenſion de 1 *toiſe* : ainſi en multipliant par 3 *pieds* qui ne ſont que la moitié d'une *toiſe*, on ne doit avoir pour le produit, que la moitié du multiplicande, en donnant à chaque partie une ſeconde dimenſion de 1 *toiſe*. Or cette moitié ſera 28 *toiſe-toiſe*, 5 *toiſe-pied* & 4 *toiſe-pouce*; parce que la moitié de 57^T eſt 28^T, & il reſte 1 *toiſe* qui vaut 6 *pieds*, leſquels avec 4 *pieds* ſont 10 *pieds*, dont la moitié eſt 5 *pieds*, & que la moitié de 8 *pouces* eſt 4 *pouces*.

3°. Pour multiplier le multiplicande par les 6 *pouces* qui ſont au multiplicateur, l'on remarquera que 6 *pouces* ſont la ſixiéme partie de 3 *pieds*, & qu'ils doivent par conſéquent donner la ſixiéme partie du produit $28^{TT}\ 5^{TP}\ 4^{T}p$ qu'on vient de trouver pour 3 *pieds*. Or prenant la ſixiéme partie de ce produit, on aura $4^{TT}\ 4^{TP}\ 10^{T}p\ 8^{TL}$; parce que le ſixiéme de 28^{TT} eſt 4^{TT}, avec un reſte de 4^{TT} qui valent 24^{TP} dont le ſixiéme eſt 4^{TP}; que 5^{TP} va-

lent $60^{T}p$, dont le ſixiéme ſera $10^{T}p$; qu'enfin les $4^{T}p$ valant $48^{T}L$, leur ſixiéme ſera $8^{T}L$.

Ajoûtant enſemble les trois produits particuliers qu'on vient de trouver, leur ſomme 495^{TT} $5^{T}P$ $6^{T}p$ $8^{T}L$ ſera le produit demandé.

PROBLÊME.

94

Multiplier	57^{T}	4^{P}	$8p$
Par	68^{T}	3^{P}	
	456		
	342		
	22	4	
	22	4	
	7	3	4
	28	5	4
Produit total	3957^{TT}	4^{TP}	$8^{T}p$

La partie 68^{T} du multiplicateur, par laquélle il faut commencer la multiplication, étant compoſée de pluſieurs chiffres; l'on ne pourra pas multiplier directement, comme on a fait dans le Problême précédent, toutes les parties du multiplicande par cette premiere partie du multiplicateur; mais après avoir multiplié la partie 57 *toiſes* du multiplicande par 68, comme il a été dit pour les nombres incomplexes, l'on prendra pour les produits des autres parties du multiplicande par 68, des parties de 68 proportionnelles à ce que ſont les parties 4 *pieds* 8 *pouces* du multiplicande relativement à la *toiſe*. Cela fait, on aura pluſieurs produits particuliers, dont la ſomme ſera le produit de 57^{T} 4^{P} $8p$ par 68 *toiſes*. Enſuite on multipliera, comme il a été dit dans le Problême précédent, le même multiplicande 57^{T} 4^{P} $8p$ par 3 *pieds*,

1°. En multipliant la partie 57^T du multiplicande par 68^T, l'on aura ces deux produits particuliers, 456^{TT} & 3420^{TT}.

2°. Pour multiplier 4 *pieds* par 68 *toiſes*, l'on remarquera que 1 *toiſe* multipliée par 68^T donneroit 68 *toiſes quarrées*, c'eſt-à-dire un nombre de toiſes quarrées égal au multiplicateur. Ainſi 4 *pieds*, qui ne ſont que les deux tiers d'une *toiſe*, ne doivent donner que les deux tiers de 68 *toiſes quarrées*; & chaque tiers étant $22^{TT}\ 4^{TP}$, on écrira deux fois de ſuite $22^{TT}\ 4^{TP}$.

3°. Pour multiplier 8 *pouces* par 68 *toiſes*, l'on remarquera que 8 *pouces* ſont le tiers de 2 *pieds* qui ont produit $22^{TT}\ 4^{TP}$. Ainſi pour 8 *pouces* l'on prendra le tiers de $22^{TT}\ 4^{TP}$, qui ſera $7^{TT}\ 3^{TP}\ 4^{Tp}$.

Juſqu'ici l'on a ſeulement multiplié $57^T\ 4^P\ 8p$ par 68^T. Ainſi il nous reſte à multiplier le même multiplicande par 3 *pieds* qui donneront, comme dans l'exemple précédent, $28^{TT}\ 5^{TP}\ 4^{Tp}$.

Ajoûtant enſemble tous ces produits particuliers, on aura $3957^{TT}\ 4^{TP}\ 8^{Tp}$ pour le produit demandé.

PROBLÉME.

95

Multiplier	3957^{TT}	4^{TP}	8^{Tp}	
Par	22^T	2^P	$6p$	
	7914^{TTT}			
	7914			
	7	2^{TTP}		
	7	2		
	2	2	8^{TTp}	
	1319	1	6	8^{TTL}
	329	4	10	8
Produit total	88720^{TTT}	1^{TTP}	1^{TTp}	4^{TTL}

On ſe propoſera d'abord de multiplier tout le multiplicande par 22^T : & comme il n'eſt pas facile d'en multiplier directement toutes les parties par 22^T ſuivant la méthode du *N°.* 93 ; on commencera par multiplier la partie des *toiſes* du multiplicande par 22^T, & l'on prendra enſuite pour les produits des autres parties du multiplicande par 22^T, des parties de 22^{TTT}, qui ſeront proportionnelles à ce que ſont les parties 4^{TP} $8^{T}p$ du multiplicande relativement à la *toiſe quarrée* ; comme on a fait (*N°.* 94.).

1°. En multipliant la partie 3957^{TT} du multiplicande par 22^T, on aura ces deux produits particuliers 7914^{TTT} & 79140^{TTT}.

2°. Pour multiplier 4^{TP} par 22^T, on remarquera que ſi l'on avoit eu 1^{TT} à multiplier par 22^T, on auroit eu 22^{TTT} pour le produit. Ainſi puiſque les 4^{TP} qu'on doit multiplier par 22^T ne ſont que les deux tiers de 1^{TT}, on ne doit avoir que deux fois le tiers de 22^{TTT} au produit. Or le tiers de 22^{TTT} étant 7^{TTT} 2^{TTP}, on écrira ce tiers deux fois de ſuite au produit.

3°. Comme les $8^{T}p$ du multiplicande ne ſont que le tiers de 2^{TP}, dont le produit par 22^T a été trouvé de 7^{TTT} 2^{TTP}, le produit de $8^{T}p$ par 22^T ne doit être que le tiers de 7^{TTT} 2^{TTP}, qu'on trouvera de 2^{TTT} 2^{TTP} $8^{TT}p$.

Juſqu'ici le multiplicande n'a été multiplié que par 22^T : ainſi il nous reſte à le multiplier par 2^P $6p$.

4°. Si le multiplicande devoit être multiplié par 1^T, on auroit pour le produit 3957^{TTT} 4^{TTP} $8^{TT}p$. Donc, puiſqu'il doit être multiplié par 2^P qui ne ſont que le tiers de 1^T, on n'aura pour le produit que le tiers de 3957^{TTT} 4^{TTP} $8^{TT}p$, ſavoir, 1319^{TTT} 1^{TTP} $6^{TT}p$ 8^{TTL}.

5°. Comme $6p$ ne ſont que le quart de 2^P, on ne doit trouver pour le produit de la multiplication par $6p$, que le quart du produit $1319^{TTT}\ 1^{TTP}\ 6^{TT}p\ 8^{TTL}$, qu'on a trouvé pour 2^P ; & ce quart ſera $329^{TTT}\ 4^{TTP}\ 10^{TT}p\ 8^{TTL}$.

Ajoûtant enſemble tous les produits particuliers, on aura $88720^{TTT}\ 1^{TTP}\ 1^{TT}p\ 4^{TTL}$ pour le produit demandé.

PROBLÊME.

96 *Multiplier enſemble les trois nombres complexes ſuivans.*

57^T	4^P	$8p$
68^T	3^P	
22^T	2^P	$6p$

On multipliera d'abord les deux premiers nombres complexes l'un par l'autre. Enſuite on multipliera leur produit par le troiſiéme nombre complexe propoſé.

1°. En multipliant	57^T	4^P	$8p$
par	68^T	3^P	
On aura (*N°.* 94) le produit	3957^{TT}	4^{TP}	8^Tp
2°. Ce produit	3957^{TT}	4^{TP}	8^Tp
multiplié par	22^T	2^P	$6p$
Donnera (*N°.* 95)	88720^{TTT}	1^{TTP}	$1^{TT}p\ 4^{TTL}$

pour le produit de la multiplication des trois nombres complexes propoſés.

REMARQUE.

97 Juſqu'ici nous n'avons employé dans les produits des multiplications, que des toiſes quarrées & cubiques, avec des parties de ces toiſes diviſées en 6 & ſous-diviſées continuellement en 12. Mais il arrive ſouvent que, lorſqu'on a trouvé la valeur d'une ſurface en toiſes quarrées & en meſures plus petites qui ont toutes une toiſe de long ſur des largeurs égales aux parties dans leſquelles on diviſe ordinairement la toiſe linéaire, on veut réduire toutes ces meſures moindres que la toiſe quarrée, en meſures quarrées, c'eſt-à-dire en pieds quarrés, en pouces quarrés, & en lignes quarrées. Il peut auſſi arriver qu'après avoir trouvé la ſolidité d'un corps en toiſes cubes, & en d'autres meſures ſolides qui ont toutes une toiſe quarrée de baſe, ſur des épaiſſeurs égales aux parties dans leſquelles on diviſe la toiſe linéaire, on veuille réduire toutes les meſures moindres que la toiſe cube, en meſures cubes, ſavoir en pieds cubes, en pouces cubes & en lignes cubes. Ainſi il faut avoir des regles pour réduire les meſures ſuperficielles moindres que la toiſe quarrée, en pieds quarrés, pouces quarrés & lignes quarrées, & pour réduire les meſures ſolides moindres que la toiſe cube, en pieds cubes, pouces cubes & lignes cubes.

I.

Pour réduire en pieds quarrés, pouces quarrés & lignes quarrées, les meſures ſuperficielles moindres que la toiſe quarrée.

1°. On multipliera par 6 le nombre des *TP*, & le produit ſera des pieds quarrés.

2°. Chaque *toiſe-pouce* ayant 72 *pouces* de long ſur 1 *pouce* de large, vaut 72 *pouces quarrés*, ou la

moitié d'un pied quarré. Ainſi l'on prendra la moitié du nombre des *toiſe-pouce* qu'on aura, & cette moitié donnera des *pieds quarrés*; & ſi en prenant la moitié il reſte 1, on mettra 72 *pouces quarrés* pour la *toiſe-pouce* reſtante.

3°. Chaque *toiſe-ligne* vaut la douziéme partie d'une *toiſe-pouce*, & la *toiſe-pouce* vaut 72 *pouces quarrés*: ainſi la *toiſe-ligne* vaut 6 *pouces quarrés*. On multipliera donc le nombre des *toiſe-ligne* par 6, & l'on portera le produit aux *pouces quarrés*.

4°. Chaque unité des meſures affectées de la marque T^{I} vaut la douziéme partie d'une *toiſe-ligne* qui vaut 6 *pouces quarrés*: ainſi chaque T^{I} vaut $\frac{1}{2}$ *pouce quarré*, ou 72 *lignes quarrées*. Donc en prenant la moitié du nombre des T^{I}, on aura des *pouces quarrés*; & s'il reſte 1, l'on mettra 72 *lignes quarrées* pour cette unité reſtante.

5°. Chaque T^{II} vaut $6LL$, parce que $1T^{II}$ eſt la douziéme partie de $1T^{I}$ qui vaut 72 *lignes quarrées*. Donc en multipliant le nombre des T^{II} par 6, on les réduira en *lignes quarrées*.

6°. On fera voir de même que chaque T^{III} vaut $\frac{1}{2}LL$. Donc en prenant la moitié du nombre des T^{III}, on les réduira en *lignes quarrées*: & ainſi des autres parties continuellement 12 fois plus petites, qu'on pourra réduire en *primes quarrées*, qui ſont des *cent-quarante-quatriémes parties de ligne quarrée*.

Lorſque les deux facteurs de la multiplication n'auront pas des parties moindres que les lignes, & que les toiſes ſeront les parties principales, on n'aura jamais au produit des parties moindres que les T^{III} *dont deux valent une ligne quarrée: car ſi l'on réduiſoit les deux facteurs de la multiplication en lignes, le produit ne contiendroit que des lignes quarrées.*

EXEMPLE.

On propoſe de réduire en pieds quarrés, pouces quarrés & lignes quarrées, *les meſures qui ſont moindres que la* toiſe quarrée *dans ce produit.*

120851^{TT}	5^{TP}	5^{Tp}	9^{TL}	$0^{T^{I}}$	$4^{T^{II}}$	$8^{T^{III}}$
	6	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{2}$
	30^{PP}	72^{pp}	24^{LL}			
	2	54	4			
120851^{TT}	32^{PP}	126^{pp}	28^{LL}			

La premiere partie étant compoſée de *toiſes quarrées* qui ſont les meſures principales, on n'y changera rien. Pour réduire les autres parties, l'on écrira 6 ſous les TP, $\frac{1}{2}$ ſous les Tp, 6 ſous les TL, $\frac{1}{2}$ ſous les T^{I}, 6 ſous les T^{II}, & $\frac{1}{2}$ ſous les T^{III}. Enſuite on multipliera chaque partie du produit par le nombre qu'on aura écrit au-deſſous de lui, ſavoir la premiere, la troiſiéme & la cinquiéme parties après les *toiſes quarrées* par 6; & la ſeconde, la quatriéme & la ſixiéme parties après les *toiſes quarrées* par $\frac{1}{2}$: en obſervant que la premiere & la ſeconde parties après les *toiſes*, qu'on multipliera par 6 & par $\frac{1}{2}$, donneront des *pieds quarrés*; que la troiſiéme & la quatriéme, multipliées par 6 & par $\frac{1}{2}$, donneront des *pouces quarrés*; & que la cinquiéme & la ſixiéme parties, multipliées par 6 & par $\frac{1}{2}$, donneront des *lignes quarrées.*

On dira donc: 6 fois 5^{TP} font 30^{PP}, qu'on écrira au-deſſous avec le caractere PP qui ſignifie *pieds quarrés*. Puis on dira: la moitié de 5^{Tp} eſt $2^{PP}\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire 2 *pieds quarrés*, & 72 *pouces quarrés*: ainſi l'on écrira 2^{PP} au-deſſous de 30^{PP}, & 72^{pp} dans la colonne ſuivante.

Enſuite on multipliera 9^{TL} par 6, ce qui produira 54^{pp} qu'on écrira dans la colonne des *pouces quarrés* au-deſſous de 72^{pp}; & l'on multipliera 0^{TI} par $\frac{1}{2}$, ce qui ne produira rien de plus pour les *pouces quarrés*.

Enfin l'on multipliera 4^{TII} par 6, ce qui produira 24 *lignes quarrées*; & l'on multipliera 8^{TIII} par $\frac{1}{2}$, ce qui produira encore 4 *lignes quarrées*.

Ajoûtant enſemble les nouvelles meſures quarrées de même eſpece, on trouvera que le produit propoſé, $120851^{TT}\ 5^{TP}\ 5^{Tp}\ 9^{TL}\ 0^{TI}\ 4^{TII}\ 8^{TIII}$ ſe réduit aux meſures quarrées $120851^{TT}\ 32^{PP}\ 126^{pp}\ 28^{LL}$.

II.

Pour réduire en *pieds cubes, pouces cubes & lignes cubes*, les meſures ſolides qui ont une toiſe quarrée de baſe, ſur une épaiſſeur égale aux parties dans leſquelles on diviſe ordinairement la toiſe linéaire.

1°. Comme la *toiſe quarrée* contient 36 *pieds quarrés*, & que 1^{TTP} eſt une *toiſe quarrée* ou 36 *pieds quarrés* multipliés par 1 pied, ce qui fait 36 *pieds cubes*; il eſt clair qu'en multipliant le nombre des TTP par 36, on les convertira en *pieds cubes*.

2°. Chaque TTp eſt la douziéme partie de 1^{TTP} qui vaut 36 *pieds cubes*. Ainſi chaque TTp vaut 3 *pieds cubes*; & par conſéquent, ſi l'on multiplie par 3 le nombre des TTp, on les convertira en *pieds cubes*.

3°. Chaque TTL eſt la douziéme partie de 1^{TTp} qui vaut 3 *pieds cubes*. Ainſi chaque TTL eſt $\frac{1}{4}$ de *pied cube*; & comme le *pied cube* vaut 1728 *pouces cubes*, chaque TTL vaudra 432 *pouces cubes*. Donc en diviſant le nombre des TTL par 4, on aura encore des *pieds cubes*; & s'il reſte quelques unités qui ne puiſſent pas être diviſées par 4, on les multipliera par 432, & le

produit ſera des *pouces cubes*; c'eſt-à-dire que pour 1^{TTL} on mettra 432*ppp*; pour 2^{TTL} on mettra 864*ppp*; & pour 3^{TTL} on mettra 1296*ppp*.

4°. Chaque TT^{I} eſt la douziéme partie de 1^{TTL} qui vaut 432 *pouces cubes*. Ainſi $1^{TT^{I}}$ vaut 36 *pouces cubes*: donc en multipliant le nombre des TT^{I} par 36, on les convertira en *pouces cubes*.

5°. $1^{TT^{II}}$ eſt la douziéme partie de $1^{TT^{I}}$ qui vaut 36 *pouces cubes*. Ainſi $1^{TT^{II}}$ vaut 3 *pouces cubes*: donc en multipliant le nombre des TT^{II} par 3, on les convertira en *pouces cubes*.

6°. $1^{TT^{III}}$ eſt la douziéme partie de $1^{TT^{II}}$ qui vaut 3 *pouces cubes*. Ainſi $1^{TT^{III}}$ vaut $\frac{1}{4}$ de *pouce cube* ou 432 *lignes cubes*: donc ſi l'on prend le quart du nombre des TT^{III}, on les convertira en *pouces cubes*; & s'il reſte 1 ou 2 ou 3 unités, on prendra pour elles 432, ou 864, ou 1296 *lignes cubes*.

7°. $1^{TT^{IV}}$ eſt la douziéme partie de $1^{TT^{III}}$ qui vaut 432 *lignes cubes*. Ainſi $1^{TT^{IV}}$ vaut 36 *lignes cubes*: donc en multipliant le nombre des TT^{IV} par 36, on les convertira en *lignes cubes*.

8°. $1^{TT^{V}}$ eſt la douziéme partie de $1^{TT^{IV}}$ qui vaut 36 *lignes cubes*. Ainſi $1^{TT^{V}}$ vaut 3 *lignes cubes*: donc en multipliant le nombre des TT^{V} par 3, on les convertira en *lignes cubes*.

9°. Enfin $1^{TT^{VI}}$ eſt le douziéme de $1^{TT^{V}}$ qui vaut 3 *lignes cubes*. Ainſi $1^{TT^{VI}}$ vaut $\frac{1}{4}$ de *ligne cube*: & par conſéquent, ſi l'on diviſe le nombre des TT^{VI} par 4, on les convertira en *lignes cubes*.

On doit remarquer ici que le nombre des TT^{VI} ſera toûjours diviſible par 4, & ſera par conſéquent toûjours 0, ou 4, ou 8, toutes les fois que les trois nombres complexes qu'on aura multipliés enſemble, n'auront point d'unités moindres que la ligne. Car

ſi

ſi le nombre des TT^{VI} étant diviſé par 4, l'on avoit 1 ou 2 ou 3 unités de reſte, ces unités reſtantes vaudroient enſemble quelque choſe de moins que la ligne cube ; ce qui n'eſt pas poſſible, puiſque trois nombres qui ne renferment point d'unités moindres que la ligne, étant multipliés enſemble, ne peuvent pas produire des unités moindres que la ligne cube.

Exemple.

On propoſe de réduire en pieds cubes, pouces cubes, *&* lignes cubes, *les nombres ſuivans de meſures ſolides qui ont toutes une toiſe quarrée de baſe, ſur des épaiſſeurs différentes égales aux parties dans leſquelles on diviſe ordinairement la toiſe linéaire.*

$oTTP$	$oTTp$	$2TTL$	$3TT^{I}$	$5TT^{II}$	$5TT^{III}$	$2TT^{IV}$	$2TT^{V}$	$8TT^{VI}$
36	3	$\frac{1}{4}$	36	3	$\frac{1}{4}$	36	3	$\frac{1}{4}$
$oPPP$			$864ppp$			$432LLL$		
			108			72		
			15			6		
			1			2		
$oPPP$			$988ppp$			$512LLL$		

Sous les trois premiers nombres qui donneront des pieds cubes, on écrira ces trois nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$. Sous les trois nombres ſuivans qui donneront des pouces cubes, on écrira les mêmes nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$. Enfin ſous les trois derniers nombres qui peuvent donner des lignes cubes, on écrira encore les mêmes nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$.

Enſuite on multipliera chaque nombre de meſures, par celui qu'on a écrit au-deſſous de lui ; & comme les trois premiers ne pourront pas donner une unité,

la réduction ne donnera point de pieds cubes. Mais comme il reſtera 2 dont on ne pourra pas prendre le quart, & que ce 2 multiplié par $\frac{1}{4}$ ou diviſé par 4, donnera $\frac{1}{2}$ pied cube ou la moitié de 1728 pouces cubes, l'on écrira pour cette moitié 864 au rang qu'on aura deſtiné pour les pouces cubes.

Multipliant les trois nombres ſuivans $3^{TT\,I}$ $5^{TT\,II}$ $5^{TT\,III}$ qui doivent donner des pouces cubes, par les nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$, qui ſont au-deſſous d'eux; on aura ces trois produits 108 pouces cubes, 15 pouces cubes & 1 $\frac{1}{4}$ pouce cube : ainſi l'on écrira 108, 15 & 1 au-deſſous des 864 pouces cubes qu'on a déja trouvés, & comme $\frac{1}{4}$ pouce cube vaut 432 lignes cubes, on écrira 432 lignes cubes au lieu qu'on a deſtiné aux lignes cubes.

Enfin multipliant les trois derniers nombres de meſures qui doivent donner des lignes cubes, par les trois nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$, qui ſont au-deſſous d'eux; le premier produit ſera 72 lignes cubes, le ſecond ſera 6 lignes cubes & le troiſiéme ſera 2 lignes cubes.

Toutes les parties du produit propoſé, étant ainſi transformées en meſures cubiques, on ajoûtera enſemble les meſures cubiques de même grandeur, & l'on aura 0^{PPP} 988^{ppp} 512^{LLL}.

DU TOISÉ DES BOIS.

98 On appelle en général *Solive*, toute piéce de bois qui contient 3 pieds cubes.

Comme une piéce de bois quarrée de groſſeur uniforme, qui a 2 toiſes de longueur ſur 6 pouces de largeur & 6 pouces d'épaiſſeur, contient 3 pieds cubes, on donne ordinairement le nom de ſolive à une piéce qui a ces trois dimenſions.

Mais parce que la toiſe eſt la principale meſure dans les toiſés, l'on réduit la ſolive en un parallélépipede qui a 1 toiſe de long ſur une baſe de 72 pouces quarrés, ou égale à la moitié d'un pied quarré.

En conſidérant ainſi la ſolive, on la diviſe comme la toiſe en 6 parties égales qu'on appelle *pieds de ſolive*. Ainſi chaque pied de ſolive eſt un parallélépipede qui a 1 pied de haut ſur 72 pouces quarrés de baſe.

Le pied de ſolive ſe diviſe comme le pied linéaire, premierement en 12 pouces; enſuite le pouce ſe diviſe en 12 lignes, &c: enſorte que le pouce & la ligne de ſolive ſont des parallélépipedes dont l'un a 1 pouce, & l'autre 1 ligne de haut, ſur une baſe égale à 72 pouces quarrés, ou a la moitié d'un pied quarré.

PROBLÊME.

99 *Toiſer une piéce de bois quarrée, & la réduire en Piéces ou Solives.*

I.

On meſurera la longueur de la piéce en toiſes, ſa largeur & ſon épaiſſeur en pouces; puis ayant multiplié le nombre des pouces de la largeur par le nombre des pouces de l'épaiſſeur, on multipliera le produit qui ſera compoſé de pouces quarrés, par le nombre

des toiſes contenues dans la longueur de la piéce : enfin l'on diviſera ce nouveau produit qui contiendra des *Tpp*, par 72 ; & le quotient ſera le nombre des ſolives contenues dans la piéce propoſée.

Par exemple ſi l'on propoſe de réduire en ſolives, une piéce de $4^T\ 3^P$ de long ſur 10 pouces de large & 8 pouces d'épaiſſeur,

$$\begin{array}{r} 10p \\ 8p \\ \hline 80pp \\ 4^T\ 3^P \\ \hline 320 \\ 40 \\ \hline 360^T pp \\ 360 \\ \hline 000 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 72 \\ \hline 5 \end{array} \right. \textit{ſolives}$$

On multipliera la longueur 10 pouces par la largeur 8 pouces, ce qui produira 80 pouces quarrés ; puis on multipliera ce produit par $4^T\ 3^P$, c'eſt-à-dire par $4^T\ \frac{1}{2}$; ce qui produira $360^T pp$: enfin l'on diviſera ce produit ſolide $360^T pp$ par 72, & le quotient 5 ſera le nombre des ſolives contenues dans la piéce propoſée.

Comme la diviſion par 72 peut devenir longue ; principalement lorſque le quotient qui doit exprimer le nombre des piéces, contiendra des pieds, des pouces & des lignes de ſolive ; on a cherché d'autres méthodes plus commodes pour faire le toiſé des bois.

II.

Il y a des Toiſeurs, qui après avoir multiplié l'une par l'autre la largeur & l'épaiſſeur de la piéce meſurées en pouces, diviſent ce produit par 72 ; & qui

multiplient enſuite le nombre des toiſes contenues dans la longueur de la piéce, par le quotient de cette diviſion.

Par exemple ſi la longueur de la piéce eſt $4^T\ 4^P\ 8^p$, & que les dimenſions de ſa groſſeur ſoient 25^p & 23^p;

$$\begin{array}{r} 25^p \\ 23^p \\ \hline 75 \\ 50 \\ \hline 575 \\ 504 \\ \hline 71 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} 72 \\ \hline 7 \end{array} \right.$$

Ils multiplient 25^p par 23^p, ce qui produit 575 pouces quarrés; enſuite ils diviſent ce produit par 72, ce qui donne 7 pour le quotient, avec un reſte de 71 pouces quarrés.

Enfin ils multiplient la longueur de la piéce propoſée $4^T\ 4^P\ 8^p$, par le quotient 7 que l'on vient de trouver, & par ſon reſte 71^{pp}.

		4^T	4^P	8^p		
		7	71^{pp}			
Pour	7 baſes de ſolive	$33^{ſol}$	2^P	8^p		
	36 pouces quarrés	2	2	4		
	18 pouces quarrés	1	1	2		
	12 pouces quarrés	0	4	9	4^L	
	4 pouces quarrés	0	1	7	1	4^l
	1 pouce quarré	0	0	4	2	4
Ce qui donne le produit		$38^{ſol}$	0^P	11^p	2^L	8^l

Pour faire cette opération, il faut multiplier $4^T\ 4^P\ 8^p$ par 7, ce qui produira $33^{ſol}$ 2 pieds de ſolive & 8 pouces de ſolive.

Pour multiplier par 71 pouces quarrés, on les partagera en parties aliquotes de 72 pouces, qui ſeront 36, 18, 12, 4, 1, pouces quarrés; & l'on opérera comme il ſuit.

Si l'on avoit à multiplier $4^T\ 4^P\ 8p$ par 72 pouces quarrés, on auroit pour le produit $4^{ſol}\ 4^P\ 8p$. Ainſi en ne multipliant que par $36pp$ qui ſont la moitié de $72pp$, l'on ne doit avoir que la moitié de $4^{ſol}\ 4^P\ 8p$, ſavoir $2^{ſol}\ 2^P\ 4p$ que l'on écrira.

En multipliant par $18pp$, on ne doit avoir que la moitié de $2^{ſol}\ 2^P\ 4p$ qu'on a trouvés pour $36pp$; on n'aura donc que $1^{ſol}\ 1^P\ 2p$.

En multipliant par 12 pouces quarrés, on ne doit avoir que le tiers du produit $2^{ſol}\ 2^P\ 4p$ qu'on a trouvés pour 36 pouces quarrés, ſavoir $0^{ſol}\ 4^P\ 9p\ 4^L$.

En multipliant par 4 pouces quarrés, on ne doit avoir que le tiers de $0^{ſol}\ 4^P\ 9p\ 4^L$ qu'on a trouvés pour 12 pouces quarrés, ſavoir $0^{ſol}\ 1^P\ 7p\ 1^L\ 4^I$.

Enfin multipliant par 1 pouce quarré, l'on n'aura que le quart de $0^{ſol}\ 1^P\ 7p\ 1^L\ 4^I$ qu'on a trouvés pour 4 pouces quarrés, ſavoir $0^{ſol}\ 0^P\ 4p\ 9^L\ 4^I$.

Ajoûtant enſemble tous ces produits particuliers, on trouvera pour la valeur de la piéce propoſée $38^{ſol}\ 0^P\ 11p\ 2^L\ 8^I$.

III.

On a tâché de diminuer encore le travail du toiſé des bois quarrés, en opérant comme il ſuit.

On regarde le nombre des pouces d'une dimenſion de la groſſeur comme des pieds, & le nombre des pouces de l'autre dimenſion de la groſſeur comme des demi-pieds; & ayant réduit ces pieds & demi-pieds en toiſes, on multiplie ſucceſſivement par ces nouveaux nombres, le nombre des toiſes & parties de toiſe contenues dans la longueur de la piéce: ce qui donne un produit de toiſes cubes & de parties de toiſe cube di-

viſée en 6, & ſous-diviſée continuellement en 12, comme il a été expliqué dans le toiſé.

Par exemple, ſi l'on propoſe de réduire en ſolives, une piéce de bois dont la longueur eſt de $4^T\ 4^P\ 8^p$, & dont la groſſeur eſt de 25^p & 23^p.

On regardera 25 pouces comme $2\,1^P\ 1^p$ que l'on réduira à $4^T\ 1^P$, & l'on prendra 23 pouces pour 23 demi-pieds, ou pour $11^P\ 6^p$ qu'on réduira à $1^T\ 5^P\ 6^p$.

Les dimenſions de la groſſeur de la piéce propoſée étant ainſi préparées, on multipliera enſemble dans tel ordre qu'on voudra les trois facteurs $4^T\ 4^P\ 8^p$, $4^T\ 1^P\ 0^p$, & $1^T\ 5^P\ 6^p$.

1°. *On multipliera*	4^T	4^P	8^p	
Par	4	1		
Et l'on aura pour 4^T	19^{TT}	0^{TP}	8^{Tp}	
Et l'on aura pour 1^P		4	9	4^{TL}
Produit total	19^{TT}	5^{TP}	5^{Tp}	4^{TL}

2°. *On multipliera ce produit des deux premiers facteurs*

Par le 3°. fact.	19^{TT}	5^{TP}	5^{Tp}	4^{TL}	
	1^T	5^P	6^p		
Ce qui donnera pour 1^T	19^{TTT}	5^{TTP}	5^{TTp}	4^{TTL}	
Ce qui donnera pour 3^P	9	5	8	8	
Ce qui donnera pour 2^P	6	3	9	9	4^{TT}
Ce qui donnera pour 6^p	1	3	11	5	4
Produit total	38^{TTT}	0^{TTP}	11^{TTp}	2^{TTL}	8^{TT}

Mais au lieu de conſidérer le produit total des trois dimenſions de la piéce propoſée, comme un nombre de toiſes cubes & de parties de toiſe cube diviſée en 6, & ſous-diviſée continuellement en 12, on le regardera comme un nombre de ſolives & de parties de

ſolive diviſée en 6, & ſous-diviſée continuellement en 12; enſorte qu'au lieu d'écrire, comme on a fait, 38TTT oTTP 11TTp 2TTL 8TT' pour le produit, on écrira 38ſol. oP 11p 2L 8'; ce qui ſignifiera 38 ſolives, avec 11 pouces 2 lignes & 8 points de ſolive.

Pour démontrer que cette opération eſt bonne, on remarquera qu'en regardant comme on a fait, les pouces d'une dimenſion de la groſſeur de la piéce comme des pieds, & les pouces de l'autre dimenſion comme des demi-pieds, on a rendu une dimenſion 12 fois trop grande, & l'autre dimenſion 6 fois trop grande; enſorte que le produit ſolide 38TTT oTTP 11TTp 2TTL 8TT', dans lequel entrent ces deux dimenſions trop grandes, eſt 12 fois 6 fois, ou 72 fois trop grand. Ainſi l'on réduira ce produit ſolide à la juſte valeur qu'il doit avoir, en le rendant 72 fois moins grand. Mais la ſolive étant de trois pieds cubes, ne vaut que la ſoixante-douziéme partie de la toiſe cube. On rendra donc le produit 38TTT oTTP 11TTp 2TTL 8TT' ſoixante-douze fois moins grand, en prenant ou en écrivant ſeulement *ſolives & pieds, pouces, &c.* de ſolive, à la place de *toiſes cubes* & de *pieds, pouces, &c.* de toiſe cube.

Cette maniere de réduire les bois quarrés en ſolives, eſt celle qu'on met le plus volontiers en uſage, quand les dimenſions de la groſſeur des piéces ſont un peu conſidérables.

CHAPITRE IV.

De la Diviſion des nombres complexes.

100 LE diviſeur donné pour diviſer un nombre complexe, eſt ou incomplexe ou complexe.

Lorſque le diviſeur donné eſt incomplexe, la diviſion des nombres complexes ne differe pas de la diviſion des nombres incomplexes. On la fait en diviſant chaque partie du nombre complexe par le diviſeur incomplexe donné, & en commençant par la diviſion de la partie dont les unités ſont les plus grandes. Par exemple ſi l'on veut diviſer un nombre complexe compoſé de livres, de ſols & de deniers, on commence par diviſer la partie des livres; enſuite on diviſe la partie des ſols, en y ajoûtant la valeur des livres qui n'ont pas pû être diviſées; enfin l'on finit par la diviſion de la partie des deniers, en y joignant la valeur de la partie des ſols qui n'a pas pû être diviſée dans la diviſion précédente.

Lorſque le diviſeur donné eſt complexe, on le rend incomplexe en le multipliant par des nombres convenables, juſqu'à ce que toutes les parties qui ont des unités moindres que l'unité principale, ſoient évanouies: & pour que le quotient ſoit le même qu'il ſeroit, ſi l'on diviſoit par le diviſeur donné ſans le multiplier, on multiplie le dividende par les mêmes nombres qui ont ſervi à multiplier le diviſeur pour le rendre incomplexe; parce que nous avons vû qu'un dividende & un diviſeur multipliés également, donnent le même quotient qu'ils auroient donné s'ils n'avoient pas été multipliés.

Lorſque le diviſeur eſt un nombre abſtrait, les unités du quotient ſont de même eſpece que celles du di-

videndе ; parce que le diviſeur abſtrait marque par ſe nombre de ſes unités, que le dividende doit être partagé dans un certain nombre de parties égales ; & qu'il eſt évident que les parties d'un dividende ſont de même eſpéce que ce dividende.

Lorſque le diviſeur eſt un nombre concret, ſes unités doivent toûjours être de même eſpece que celles du dividende, à moins que le dividende ne ſoit un nombre de meſures ſuperficielles, ou ſolides : car dans ce cas, le diviſeur concret peut être un nombre concret de meſures qui ont une ou deux dimenſions de moins que les unités du dividende.

Si le dividende & le diviſeur ſont compoſés des mêmes eſpeces d'unités, le quotient eſt toûjours un nombre abſtrait ; puiſqu'il peut ſeulement exprimer combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende.

Si le dividende contient des unités ou meſures quarrées, & que le diviſeur contienne des meſures ou unités qui ſoient les côtés de ces quarrés, le quotient contiendra des unités qui ſeront des côtés des mêmes meſures quarrées. Et pour donner une regle générale, lorſque le dividende ſera compoſé d'un nombre de meſures quelconques qui auront un certain nombre de dimenſions, & que le diviſeur ſera compoſé d'unités qui auront une ou pluſieurs dimenſions des unités du dividende, les unités du quotient auront toûjours les dimenſions des unités du dividende qui ne ſont point aux unités du diviſeur.

Tout ce qu'on vient de dire au ſujet des différentes unités des quotiens, s'éclaircira dans des exemples, en même temps qu'on expliquera comment ſe fait la diviſion des nombres complexes, par des diviſeurs incomplexes, ou par des diviſeurs complexes après les avoir rendus incomplexes.

Exemple premier.

On propoſe de diviſer le nombre concret complexe 38386^{tx} 5^{lb} 4^{sd}, *par le nombre abſtrait incomplexe* 74.

Dividende 38386^{tx} 5^{lb} 4^{sd} { 74 *diviſeur*
{ 518^{tx} 14^{lb} 8^{sd} *quotient*

370
138
74
646
592
54^{tx}
20
1085^{lb}
74
345
296
49^{lb}
12
592^{sd}
592
000

On écrira le diviſeur à la droite du dividende, comme il a été dit pour la diviſion des nombres incomplexes, & l'on tirera ſous le diviſeur une barre au-deſſous de laquelle on écrira les chiffres du quotient à meſure qu'on les trouvera. Le dividende & le diviſeur étant ainſi diſpoſés, l'on opérera dans l'ordre qui ſuit.

1°. On commencera par diviſer la partie 38386^{tx} du dividende par le diviſeur donné 74, comme ſi cette partie de livres étoit la ſeule choſe qu'on eût à

diviſer; & l'on trouvera, en ſuivant les regles que nous avons données pour la diviſion des nombres incomplexes, 518^{ll} pour le quotient, avec 54^{ll} de reſte qui ne peuvent plus être diviſées par 74 ſous la forme de livres.

2° Cette premiere diviſion étant faite, on réduira en ſols les 54^{ll} reſtantes, en les multipliant par 20; ce qui produira 1080^{ſ} auſquels on ajoûtera les 5^{ſ} qui ſont au dividende; & l'on aura 1085^{ſ} pour une ſeconde partie du dividende qu'il faudra encore diviſer par le diviſeur donné 74. Comme le dividende & le diviſeur de cette ſeconde diviſion ſont encore incomplexes, on la fera ſuivant les regles que nous avons expliquées (*N°.* 37.) & l'on trouvera 14^{ſ} pour le quotient, avec 49^{ſ} de reſte qui ne peuvent plus être diviſés par 74.

3°. Ce ſecond quotient 14^{ſ} étant écrit à la droite des 518^{ll} qu'on a déjà trouvées, on réduira en deniers les 49^{ſ} qui reſtent, en les multipliant par 12; ce qui avec les 4 deniers qui ſont au dividende, produira 592 deniers pour le dividende d'une troiſiéme diviſion, par le diviſeur donné 74. Comme ce dividende 592 deniers & le diviſeur 74 ſont des nombre incomplexes; l'on trouvera, en ſuivant les regles que nous avons données pour les nombres incomplexes, 8 deniers pour le quotient ſans aucun reſte.

Ces trois diviſions étant faites, l'on aura pour le quotient du nombre complexe 38386^{ll} 5^{ſ} 4^{d} diviſé par le nombre abſtrait incomplexe 74, le nombre complexe 518^{ll} 14^{ſ} 8^{d} compoſé de livres, ſols & deniers comme le dividende.

Il eſt évident que dans les trois diviſions qu'on a faites, l'on a diviſé toutes les parties du dividende par le diviſeur donné 74. Ainſi l'on a fait ce qui étoit propoſé.

EXEMPLE II.

On propoſe de diviſer le nombre concret complexe 1280M 30 1G 2D 17g *qui a pour unités des poids, par* $51\frac{1}{4}$.

Dividende propoſé 1280M 30 1G 2D 17g { $51\frac{1}{4}$ *diviſeur propoſé*

Nouveau dividende 5121M 40 7G 1D 20g { 205 *Nouv. diviſeur*
24M 7O 6G 2D 20g *quotient*

410
1021
820
201M
8
1612O
1435
177O
8
1423G
1230
193G
3
580D
410
170D
24
4100g
410
0000

Le diviſeur étant complexe, puiſqu'il contient une partie de 51 unités avec une autre $\frac{1}{4}$ dont l'unité eſt

différente, on le multipliera par 4 pour faire évanouir la fraction $\frac{1}{4}$, ce qui donnera 205 pour un nouveau diviſeur quadruple de celui qui eſt propoſé : & afin que le quotient ſoit le même que ſi l'on diviſoit par le diviſeur propoſé $51\frac{1}{4}$, l'on multipliera auſſi le dividende propoſé par 4 ; ce qui donnera $5121^{M}\ 40\ 7^{G}\ 1^{D}\ 20^{g}$ pour un nouveau dividende lequel étant diviſé par le nouveau diviſeur 205, donnera le même quotient que ſi l'on diviſoit le dividende propoſé par le diviſeur donné ; comme nous l'avons prouvé (*N°.* 33.).

Le nouveau diviſeur étant placé à la droite du dividende comme il a été dit, on fera la diviſion comme il ſuit.

1°. On commencera par diviſer la partie 5121^{M} qui a les unités les plus grandes, par le diviſeur 205, comme il a été expliqué dans la diviſion des nombres incomplexes ; & l'on trouvera 24 marcs pour le premier quotient, avec un reſte de 201 marcs qui ne peut plus être diviſé par 205.

2°. On convertira en onces le reſte 201 marcs de la premiere diviſion, en le multipliant par 8, & on lui ajoûtera les 40 qui ſont au dividende ; ce qui donnera 16120 pour un nouveau dividende qu'on diviſera par le diviſeur 205. Comme le dividende & le diviſeur de cette nouvelle diviſion ſont incomplexes, on trouvera par les regles ci-devant données (*N°.* 37.) 70 pour le quotient de cette ſeconde diviſion, avec un reſte de 1770 qui ne peut plus être diviſé par 205.

3°. On réduira en gros les 1770 reſtantes de la diviſion précédente, en les multipliant par 8, & l'on y ajoûtera les 7^{G} qui ſont au dividende ; ce qui donnera 1423^{G} pour un nouveau dividende incomplexe qu'on diviſera par le diviſeur incomplexe 205 : &

l'on aura 6^{G} pour le quotient, avec un reſte de 193^{G} qui ne peut plus être diviſé par 205.

4°. On convertira le reſte 193^{G} en deniers, en le multipliant par 3; & ajoûtant à ces deniers 1D qui ſe trouve au dividende, on aura un dividende incomplexe 580D qu'on diviſera par le diviſeur 205; ce qui donnera 2D pour le quotient de cette diviſion, avec un reſte de 170D qui ne peut plus être diviſé par 205.

5°. Enfin l'on réduira en grains ce reſte 170D, en le multipliant par 24, & l'on ajoûtera au produit les 20 grains qui ſont au dividende; ce qui donnera 4100g pour un dernier dividende qu'il faudra diviſer comme les autres par 205: & l'on trouvera pour le quotient 20 grains ſans aucun reſte.

Toutes ces diviſions étant faites; les cinq quotiens qu'on aura trouvés, compoſeront le quotient complexe 24^{M} 7O 6^{G} 2D 20g.

Comme on a diviſé toutes les parties du nouveau dividende par le nouveau diviſeur, & que le quotient qu'on a trouvé eſt évidemment le même que ſi l'on avoit diviſé le dividende propoſé par le diviſeur donné; il eſt clair qu'on a trouvé le quotient que l'on demandoit en propoſant de diviſer 1280^{M} 3O 1^{G} 2D 17g par 51 $\frac{1}{4}$.

Si au lieu de marcs qu'on a pris dans cet exemple pour les unités principales de poids, on avoit employé des livres qui valent deux marcs chacune, on auroit eu 640℔ 3O 1^{G} 2D 17g *à diviſer par* 51 $\frac{1}{4}$; *& l'on auroit trouvé* 12℔ 7O 6^{G} 2D 20g *pour le quotient. L'opération n'auroit été différente qu'en ce que, pour réduire le reſte des livres en onces, il auroit fallu les multiplier par* 16.

EXEMPLE III.

On propoſe de diviſer le nombre complexe 38515^{tt} 19^{ß} *par* 518^{tt} 14^{ß} 8^{d}.

Dividende propoſé } 38515^{tt} 19^{ß} { 518^{tt} 14^{ß} 8^{d} *diviſeur propoſé*

Nouveau dividende } 115547^{tt} 17^{ß} { 1556^{tt} 4^{ß} *nouveau diviſeur*

Dividende préparé } 577739^{tt} 5^{ß} { 7781^{tt} *diviſeur préparé*

54467 — 74 $\frac{1}{4}$ *quotient*

33069

31124

1945^{tt} 5^{ß}

Le diviſeur étant complexe, on le multipliera par des nombres convenables pour faire évanouir les deniers & les ſols qu'il contient. Pour trouver ces nombres convenables, on remarquera que 8^{d} ſont le tiers de 2^{ß} : ainſi en multipliant le dividende & le diviſeur par 3, l'on aura un nouveau dividende 115547^{tt} 17^{ß}, & un nouveau diviſeur 1556^{tt} 4^{ß} qui ne contiendra plus de deniers. Enſuite on remarquera que les 4^{ß} qui ſont au nouveau diviſeur, étant le cinquiéme de 1^{tt}, ſi l'on multiplie le dividende & le diviſeur par 5, on aura un nouveau dividende 577739^{tt} 5^{ß}, & un nouveau diviſeur 7781^{tt} qui ne contiendra plus ni ſols ni deniers.

Le dividende & le diviſeur étant ainſi préparés, on les diviſera l'un par l'autre. Or diviſant 577739^{tt}, premiere

premiere partie du dividende préparé, par le diviſeur préparé 7781$^{\#}$, on trouvera pour le quotient le nombre abſtrait 74 qui ſignifie que le diviſeur 7781$^{\#}$ eſt contenu 74 fois dans le dividende 577739$^{\#}$; & il reſtera 1945$^{\#}$ 5§ qui ne peuvent point être diviſés par 7781$^{\#}$; mais comme ce reſte eſt préciſément le quart du diviſeur 7781$^{\#}$, l'on metrra encore $\frac{1}{4}$ au quotient, & l'on aura $74\frac{1}{4}$ pour le quotient exact demandé.

Autrement : lorſque le dividende & le diviſeur ont des unités de même eſpece; (comme dans cet exemple, ou l'on a des livres ou des parties de livre à diviſer par livres, ſols & deniers) on réduit le dividende & le diviſeur à des unités d'une même eſpece qui ſoit la plus baſſe de celles qu'on trouve dans le dividende & le diviſeur; c'eſt-à-dire que dans l'exemple propoſé, où le diviſeur contient des deniers, on réduit le dividende & le diviſeur en deniers, en multipliant les livres par 240, & les ſols par 12, & qu'on ne fait qu'un ſeul terme de toutes les parties du dividende dont les livres & les ſols ont été convertis en deniers, de même que de toutes les parties du diviſeur dont les livres & les ſols ont été pareillement convertis en deniers. Enſuite on diviſe le dividende réduit en un ſeul terme, par le diviſeur réduit auſſi à un ſeul terme; & l'on trouve le quotient par les regles que nous avons expliquées pour les nombres incomplexes; mais il faut remarquer que le dividende & le diviſeur étant compoſés des mêmes eſpeces d'unités, le diviſeur ſera un nombre abſtrait qui exprimera combien de fois le quotient eſt contenu dans le dividende.

EXEMPLE IV.

Dividende proposé	*diviseur proposé*
$495^{TT}\ 5^{TP}\ 6^{Tp}\ 8^{TL}$	$57^{T}\ 4^{P}\ 8^{p}$

Nouveau dividende	*nouveau diviseur*
$1487^{TT}\ 4^{TP}\ 8^{Tp}$	$173^{T}\ 2^{P}$

Dividende préparé
$4463^{TT}\ 2^{TP}$
4160
303^{TT}
6
1820^{TP}
1560
260^{TP}
12
3120^{Tp}
3120
0000

diviseur préparé 520^{T}
quotient $8^{T}\ 3^{P}\ 6^{p}$

Comme il faut rendre le diviseur incomplexe, on le multipliera par 3 pour faire évanouir les 8 pouces, & l'on multipliera pareillement le dividende par 3; ce qui donnera $1487^{TT}\ 4^{TP}\ 8^{Tp}$ pour un nouveau dividende, & $173^{T}\ 2^{P}$ pour un nouveau diviseur.

Comme il faut encore faire évanouir dans le nouveau diviseur les 2 pieds qui sont le tiers d'une toise, on multipliera encore par 3 le nouveau dividende & le nouveau diviseur; ce qui donnera $4463^{TT}\ 2^{TP}$ pour le dividende, & 520^{T} pour le diviseur entiérement préparé.

Le diviſeur étant rendu incomplexe, en multipliant également le dividende & le diviſeur, comme nous venons de faire, le quotient de la diviſion de ces deux nouveaux termes ſera le même, que ſi l'on diviſoit le dividende propoſé, par le diviſeur complexe donné ſans aucune préparation. Ainſi en diviſant le dividende préparé par le diviſeur incomplexe préparé, l'on trouvera le quotient qu'on demande.

Lorſqu'on multiplie une quantité complexe compoſée de toiſes, pieds, pouces, par un nombre de toiſes, l'on trouve pour le produit un nombre de toiſes quarrées qui peuvent être accompagnées de pluſieurs parties de la toiſe quarrée diviſée en 6, & ſous-diviſée continuellement en 12 : & comme en diviſant un nombre de toiſes quarrées & de parties de toiſe quarrée, l'on défait ce qu'on a fait par la multiplication ; il eſt clair que ſi l'on diviſe par des toiſes un nombre complexe compoſé de toiſes quarrées & de parties de toiſe quarrée, comme dans l'exemple propoſé, l'on aura un quotient compoſé de toiſes linéaires, & quelquefois de parties de toiſe linéaire, comme on va le voir dans le détail de cette diviſion.

En diviſant la partie 4463^{TT} du dividende préparé par le diviſeur préparé 520^{T}, l'on trouvera pour le quotient 8 toiſes ; & il reſtera 303 toiſes quarrées qui ne pourront point être diviſées par le diviſeur 520^{T}, tant qu'elles ſeront ſous la forme de toiſes quarrées.

Pour continuer la diviſion, l'on réduira en toiſes-pieds les 303 toiſes quarrées reſtantes, en les multipliant par 6 ; ce qui produira 1818 toiſes-pieds qui avec $2TP$ que l'on a au dividende feront $1820TP$. Enſuite on diviſera ce nombre de toiſes-pieds par le

diviſeur préparé 520^T; & l'on aura 3 pieds pour le quotient; parce que les toiſes-pieds ſont des produits de multiplication de pieds, par des toiſes & doivent par conſéquent donner des pieds lorſqu'on les diviſe par des toiſes. Cette diviſion étant faite, on aura un reſte de $260TP$ qui ne pourra plus être diviſé par le diviſeur préparé 520^T.

Pour continuer la diviſion, l'on convertira en toiſes-pouces le reſte $260TP$ de la diviſion précédente, en le multipliant par 12; ce qui donnera 3120^Tp qu'on diviſera encore par le diviſeur préparé 520^T; & l'on aura pour le quotient 6 pouces; parce que des toiſes-pouces diviſées par des toiſes doivent donner des pouces.

Cette diviſion étant faite ſans aucun reſte, le quotient demandé ſera $8T\ 3P\ 6p$.

Dans ce dernier exemple, la toiſe étant la principale dimenſion des meſures du dividende, nous avons été obligés de réduire le diviſeur complexe en toiſes; & nous avons trouvé pour le quotient un nombre compoſé de toiſes, pieds, pouces, &c.

Si le pied étoit la principale dimenſion des parties du dividende, il faudroit convertir le diviſeur en un nombre de pieds incomplexes; & l'on auroit pour le quotient un nombre compoſé de pieds, pouces, lignes, &c.

Par exemple ſi l'on avoit à diviſer $60PP\ 1Pp\ 10PL$ *par* $2P\ 6p\ 6L$, *on rendroit le diviſeur incomplexe, en multipliant le dividende & le diviſeur par 24; & l'on auroit* $1443PP\ 8Pp$ *à diviſer par* $61P$ *dont le quotient ſeroit* $23P\ 8p$.

On ne croit pas devoir entrer dans le détail de cette opération; parce qu'elle eſt ſemblable à la précédente.

Exemple V.

On propoſe de diviſer $88720^{TTT}\ 1^{TTP}\ 1^{TTp}\ 4^{TTL}$ *par* $22^{T}\ 2^{P}\ 6p$.

Dividende propoſé	*Diviſeur propoſé*
$88720^{TTT}\ 1^{TTP}\ 1^{TTp}\ 4^{TTL}$	$22^{T}\ 2^{P}\ 6p$

Nouveau dividende	*Nouveau diviſeur*
$177440^{TTT}\ 2^{TTP}\ 2^{TTp}\ 8^{TTL}$	$44^{T}\ 5^{P}$

Dividende préparé $1064642^{TTT}\ 1^{TTP}\ 4^{TTp}$

Diviſeur préparé 269

quotient $3957^{TT}\ 4^{TP}\ 8^{Tp}$

807
2576
2421
1554
1345
2092
1883
209
6
1255^{TTP}
1076
179
12
2152^{TTp}
2152
0000

Pour faire évanouir les $2^{P}\ 6p$ du diviſeur, on multipliera le dividende & le diviſeur ſucceſſivement par 2 & par 6; ce qui donnera pour nouveau dividende préparé $1064642^{TTT}\ 1^{TTP}\ 4^{TTp}$, & 269^{T} pour nouveau diviſeur préparé.

1°. On diviſera 1064642^{TTT} par 269^{T}; & le quotient ſera 3957^{TT}, avec un reſte de 209^{TTT}.

2°. On réduira ce reſte en toiſes-toiſes-pieds, en le multipliant par 6, & l'on y ajoûtera une toiſe-toiſe-pied qui ſe trouve au dividende préparé; ce qui donnera 1255^{TTP} qu'il faudra auſſi diviſer par 269^{T}; & le quotient ſera 4^{TP}, avec un reſte 179^{TTP}.

3°. On réduira ce reſte en toiſes-toiſes-pouces, en le multipliant par 12, & l'on ajoûtera au produit 4^{TTp} qui ſont au dividende préparé; ce qui donnera 2152^{TTp} qu'il faudra encore diviſer par le diviſeur préparé 269^{T}; & le quotient ſera 8^{Tp} ſans aucun reſte.

Le quotient total de la diviſion ſera donc 3957^{TT} 4^{TP} 8^{Tp}.

REMARQUE.

Si l'on avoit diviſé le dividende propoſé $8872o^{TTT}$ 1^{TTP} 1^{TTp} 4^{TTL}, par 22^{TT} 2^{TP} 6^{Tp}, l'on auroit pour le quotient 3957^{T} 4^{P} $8p$ qui ne diffère du quotient que l'on a trouvé, qu'en ce que les unités de ce nouveau quotient ont une dimenſion de moins que les unités du quotient de l'exemple.

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

LIVRE V.

Des Proportions & des principales Regles qui en dépendent.

CHAPITRE PREMIER.

Des Proportions en général.

DÉFINITIONS.

101 ON appelle *Rapport* ou *Raiſon* la comparaiſon d'une grandeur avec une autre.

Dans la comparaiſon que l'on fait de deux grandeurs, ſi l'on ne conſidere que leur différence, c'eſt-à-dire la quantité dont l'une ſurpaſſe l'autre ou eſt ſurpaſſée par l'autre, cette différence ſe nommera *Rapport arithmétique* ou *Raiſon arithmétique*. Par exemple en comparant 12 avec 3, ſi l'on conſidere ſeulement que

12 ſurpaſſe 3, ou que 3 eſt ſurpaſſé par 12 de 9 unités; ces 9 unités qui ſont la différence de 12 à 3 ou de 3 à 12, ſeront le rapport arithmétique de 12 à 3.

Mais ſi en comparant deux grandeurs, on conſidere combien de fois l'une contient l'autre, ou eſt contenue dans l'autre; ce *nombre de fois* ſera nommé *Rapport géométrique* ou *Raiſon géométrique*, ou ſimplement *Rapport* ou *Raiſon* des deux grandeurs comparées. Par exemple en comparant 12 avec 3, ſi l'on conſidere que 12 contient 4 fois 3, ou que 3 eſt contenu 4 fois dans 12; ce nombre 4 s'appellera le *Rapport géométrique* ou la *Raiſon géométrique* de 12 à 3, ou ſimplement *Rapport* ou *Raiſon* de 12 à 3,

On voit par ces définitions des Rapports, qu'il n'y a de rapport arithmétique ou géométrique, qu'entre les quantités de même eſpece.

1°. Le *Rapport arithmétique* étant la différence de deux grandeurs, on ne peut avoir ce rapport ou cette différence, qu'en retranchant la plus petite quantité de la plus grande. Ainſi la plus petite quantité doit faire partie de la plus grande, & doit par conſéquent être de même eſpece qu'elle.

2°. Le *Rapport géométrique* de deux grandeurs, étant le nombre de fois que l'une contient l'autre, ſuppoſe évidemment que la plus petite eſt une partie de la plus grande, & eſt par conſéquent de même eſpece qu'elle. Ainſi dans le *Rapport géométrique* comme dans le *Rapport arithmétique*, les deux grandeurs comparées doivent être de la même eſpece.

Il ſuit encore de ce qu'on vient de dire, que le rapport arithmétique de deux grandeurs, eſt une grandeur de même eſpece que celles qui ſont comparées: car le rapport arithmétique étant la différence des deux grandeurs comparées, ou l'excès de la plus grande ſur la plus petite, eſt néceſſairement

une partie de la plus grande, & eſt par conſéquent de même eſpece qu'elle.

Il n'en eſt pas de même du rapport géométrique. Ce rapport eſt toûjours un nombre abſtrait, puiſqu'il ne repréſente qu'un nombre de fois, c'eſt-à-dire le nombre de fois que l'une des deux grandeurs comparées contient l'autre.

Puiſque le rapport géométrique de deux grandeurs eſt le nombre de fois que l'une contient l'autre; & qu'on trouve ce nombre de fois, en diviſant l'une par l'autre; il eſt évident que le rapport géométrique de deux grandeurs, eſt le quotient de la diviſion de l'une de ces grandeurs par l'autre. Par exemple le rapport qu'il y a entre 12 & 3, eſt le quotient de la diviſion de 12 par 3.

Lorſque l'on compare deux grandeurs, par exemple 12 & 3, la grandeur 12 qu'on nomme ou que l'on écrit la premiere, s'appelle *Antécédent*, & l'autre 3 ſe nomme *Conſéquent*: & ſi l'on comparoit 3 avec 12, la grandeur 3 qui ſeroit écrite la premiere, ſeroit l'antécédent du rapport, & l'autre grandeur 12 ſeroit le conſéquent.

Puiſque le rapport géométrique de deux grandeurs eſt le quotient de la diviſion de l'une par l'autre, on peut écrire les deux termes d'un rapport en forme de fraction ou de diviſion indiquée; c'eſt-à-dire qu'on peut écrire l'antécédent au-deſſus du conſéquent, avec une barre entre deux. Par exemple, pour écrire le rapport de 12 à 6, on le met ſous cette forme $\frac{12}{6}$ qui ſignifie 12 diviſé par 6, ou plûtôt le quotient de 12 diviſé par 6; & pour écrire le rapport de 3 à 12, on le met ſous cette forme de fraction $\frac{3}{12}$ qui ſignifie le quotient de 3 diviſé par 12.

102 Deux rapports égaux, par exemple le rapport de 2 à 3 & celui de 4 à 6, font une *Proportion géométrique*. Ainſi une Proportion géométrique eſt compoſée de 4 termes dont le premier contient le ſecond autant de fois que le troiſiéme contient le quatriéme; ou de quatre termes, dont le premier eſt contenu dans le ſecond autant de fois que le troiſiéme eſt contenu dans le quatriéme.

Pour repréſenter une proportion géométrique, par exemple celle qui ſeroit compoſée des deux rapports égaux $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{6}$, on l'écrit ordinairement ainſi, 2 : 3 :: 4 : 6; ce qui ſignifie que 2 eſt à 3 comme 4 eſt à 6, ou que 2 eſt contenu dans 3 comme 4 eſt contenu dans 6; c'eſt-à-dire qu'on met deux points entre les deux termes de chaque rapport, & qu'on ſépare les deux rapports égaux par quatre points.

Le premier & le quatriéme terme d'une Proportion géométrique ſe nomment les *Extrêmes*; & le ſecond avec le troiſiéme s'appellent les *Moyens*.

THÉORÈME.

103 *On aura le quatriéme terme d'une Proportion géométrique, en multipliant le troiſiéme terme par le quotient du ſecond diviſé par le premier.*

Il peut arriver deux cas; ou le premier terme ſera contenu dans le ſecond, ou le ſecond ſera contenu dans le premier. On va faire voir la vérité du Théorême dans ces deux hypothèſes.

Premier cas. Il eſt évident qu'on aura le quatriéme terme d'une proportion géométrique, en multipliant le troiſiéme terme par le nombre de fois qu'il eſt contenu dans le quatriéme.

Mais par la nature de la proportion, le troiſiéme terme eſt contenu dans le quatriéme autant de fois

que le premier eſt contenu dans le ſecond (*N°.* 102), & ce nombre de fois que le premier terme eſt contenu dans le ſecond, eſt égal au quotient du ſecond terme diviſé par le premier.

Donc on aura le quatriéme terme d'une proportion géométrique, en multipliant ſon troiſiéme terme par le quotient du ſecond terme diviſé par le premier.

Par exemple ſi une proportion géométrique commence par ces trois termes 2 : 3 :: 7 :, & qu'on veuille avoir le quatriéme terme; on diviſera le ſecond terme 3 par le premier terme 2; & l'on aura pour le quotient la fraction $\frac{3}{2}$ qui ſera le nombre de fois que le premier terme 2 eſt contenu dans le ſecond 3, ou que le troiſiéme terme 7 eſt contenu dans le quatriéme qu'on cherche. Ainſi en multipliant 7 par $\frac{3}{2}$, le produit $\frac{21}{2}$ ou $10\frac{1}{2}$ ſera le quatriéme terme demandé; & la proportion entiere ſera $2 : 3 :: 7 : 10\frac{1}{2}$.

Second cas. Il eſt clair qu'on aura le quatriéme terme d'une proportion, en diviſant le troiſiéme terme par le nombre de fois que le quatriéme y eſt contenu.

Mais par la nature de la proportion, le quatriéme terme eſt contenu dans le troiſiéme autant de fois que le ſecond eſt contenu dans le premier; & ce nombre de fois eſt égal au quotient de la diviſion du premier terme par le ſecond.

Donc on aura le quatriéme terme d'une proportion géométrique, en diviſant le troiſiéme terme par le quotient de la diviſion du premier terme par le ſecond, c'eſt-à-dire par une fraction qui aura le premier terme pour numérateur, & le ſecond pour dénominateur.

Mais (*N°.* 72.) diviſer par une fraction qui a pour numérateur le premier terme & pour dénominateur

le ſecond terme, c'eſt multiplier par la fraction inverſe qui a pour numérateur le ſecond terme & pour dénominateur le premier, & qui eſt par conſéquent le quotient de la diviſion du ſecond terme par le premier.

Donc on aura le quatriéme terme d'une proportion géométrique, en multipliant ſon troiſiéme terme par le quotient du ſecond terme diviſé par le premier, comme dans le premier cas.

Par exemple ſi une proportion géométrique commence par ces trois rermes 12 : 8 : : 20 :, & qu'on veuille avoir le quatriéme terme; on diviſera le premier terme 12 par le ſecond 8; & l'on aura pour le quotient la fraction $\frac{12}{8}$ qui ſera le nombre de fois que le ſecond terme 8 eſt contenu dans le premier 12, ou que le quatriéme terme qu'on cherche, eſt contenu dans le troiſiéme 20.

Ainſi en diviſant 20 par $\frac{12}{8}$, on doit évidemment avoir le quatriéme terme.

Mais diviſer 20 par la fraction $\frac{12}{8}$, c'eſt le multiplier par la fraction inverſe $\frac{8}{12}$ (*N°.* 72.).

On aura donc le quatriéme terme de la proportion dont les trois premiers ſont 12 : 8 : : 20 :, en multipliant le troiſiéme terme 20 par la fraction $\frac{8}{12}$ qui eſt le quotient du ſecond terme diviſé par le premier; & ce quatriéme terme étant $13\frac{1}{3}$, la proportion entiere ſera 12 : 8 : : 20 : $13\frac{1}{3}$.

Corollaire premier.

104. Multiplier un nombre par une fraction, c'eſt le multiplier par le numérateur de la fraction, & diviſer le produit par le dénominateur de la même fraction (*N°.* 67.). Donc puiſqu'on trouve le quatriéme terme d'une proportion, en multipliant ſon troiſiéme terme par une fraction qui a le ſecond terme

pour numérateur & le premier pour dénominateur; on aura ce quatriéme terme en multipliant le troiſiéme par le ſecond, & en diviſant le produit par le premier terme; c'eſt-à-dire que le quatriéme terme ſera égal au produit des moyens de la proportion, diviſé par le premier terme.

Par exemple ſi une proportion géométrique commence par ces trois termes 2 : 3 :: 7 :, & qu'il faille en trouver le quatriéme terme; il faudra multiplier le troiſiéme terme 7 par la fraction $\frac{3}{2}$ (*N°.* 103); c'eſt-à-dire qu'il faudra multiplier 7 par 3, & diviſer le produit par 2 (*N°.* 67); ce qui donnera $\frac{21}{2}$ ou $10\frac{1}{2}$ pour le quatriéme terme. Ainſi la proportion ſera 2; 3 :: 7 : $10\frac{1}{2}$.

Corollaire II.

105 Donc ſi les trois premiers termes d'une proportion géométrique ſont donnés, par exemple ces trois nombres 2 : 3 :: 7 :, on pourra toûjours mettre le troiſiéme 7 à la place du ſecond 3, & le ſecond 3 à la place du troiſiéme 7, comme ici 2 : 7 :: 3 :, ſans qu'il en arrive aucun changement dans le quatriéme terme qu'on doit trouver.

Car (*N°.* 104) le quatriéme terme eſt égal au produit des moyens diviſé par le premier, & dans ces deux arrangemens $\left\{\begin{matrix}2:3::7:\\2:7::3:\end{matrix}\right\}$ les moyens étant les mêmes auſſi bien que le premier terme, il n'y aura point de changement dans le quotient de la diviſion du produit des moyens par le premier terme.

Il nous arrivera ſouvent de changer d'ordre, le ſecond & le troiſiéme termes d'une proportion dont nous aurons le quatriéme terme à trouver par le moyen des trois premiers.

COROLLAIRE III.

106 Puiſqu'on trouve le quatriéme terme de toute proportion géométrique, par exemple de celle-ci 2 : 3 : : 4 : 6, en multipliant le troiſiéme terme par le ſecond, & en diviſant le produit par le premier; il en réſulte que le produit des extrêmes d'une proportion géométrique, eſt égal au produit des moyens de la même proportion, c'eſt-à-dire que 6×2 & 4×3 ſont des produits égaux.

Pour le prouver, il ſuffit de remarquer que le quatriéme terme conſideré (*N°.* 104) comme le produit des moyens diviſé par le premier terme, étant multiplié par le premier terme, pour faire le produit des extrêmes, il en réſultera formellement le produit des moyens.

Car la diviſion du produit des moyens par le premier terme, ſera détruite par la multiplication qu'on fera enſuite par ce premier terme; enſorte que le réſultat ſe réduira au produit des moyens.

Donc le produit des extrêmes d'une proportion géométrique, eſt égal au produit des moyens de la même proportion.

COROLLAIRE IV.

107 Le produit des extrêmes d'une proportion géométrique, étant égal au produit des moyens; ſi l'on diviſe ces deux produits par un extrême ou par un moyen, l'on trouvera que chaque terme extrême d'une proportion eſt égal au produit des moyens diviſé par l'autre extrême, & que chaque terme moyen eſt égal au produit des extrêmes diviſé par l'autre moyen.

Ainſi lorſque trois termes d'une proportion géométrique ſeront donnés, & que l'on connoîtra l'ordre ſuivant lequel ces trois termes ſont diſpoſés dans la proportion, l'on ſera en état de trouver le terme qui manque dans cette proportion; parce qu'on ſaura ſi ce terme à trouver eſt un extrême ou un moyen, & que nous avons appris à trouver un extrême ou un moyen, en employant les trois autres termes de la proportion.

CHAPITRE II.

De la Regle de Trois, & de ſes différentes eſpeces.

DÉFINITIONS.

108 LORSQUE l'on connoît trois termes d'une proportion géométrique, l'opération qu'on fait pour trouver le terme qui manque à cette proportion, s'appelle *Regle de Trois.* On la nomme auſſi *Regle de Proportion*; & quelques-uns l'appellent *Regle d'Or*, à cauſe de l'utilité dont elle eſt dans le commerce.

Nous avons vû dans le Chapitre précédent, comment on découvre le terme qui manque dans une proportion dont on connoît trois termes. Dans celui-ci nous verrons différens exemples de cette opération, & comment les termes connus doivent être conſiderés.

Les Arithméticiens diſtinguent deux ſortes de Regles de Trois, la *Regle de Trois directe*, & la *Regle de Trois inverſe*, qui ſont toutes deux ou *ſimples* ou *compoſées*.

Ainſi l'on compte quatre ſortes de Regles de Trois ; la *Regle de Trois directe ſimple* & la *Regle de Trois inverſe ſimple ;* la *Regle de Trois directe compoſée* & la *Regle de Trois inverſe compoſée.*

La Regle de Trois directe ſimple, eſt celle dont les trois termes connus ſont les trois premiers d'une proportion géométrique. Ainſi l'objet de cette Regle eſt de faire trouver le quatriéme terme d'une proportion géométrique dont on connoît les trois premiers termes.

La Regle de Trois inverſe ſimple, eſt celle où l'on connoît trois termes dont deux ſont les extrêmes d'une proportion géométrique, & l'autre un moyen de la même proportion : enſorte que l'objet de cette Regle eſt de faire découvrir un terme moyen d'une proportion dont trois termes ſont donnés. Mais parce que les Arithméticiens ne s'aſſujetiſſent point à mettre dans ſa place le terme inconnu qu'ils cherchent, & qu'ils écrivent de ſuite les trois termes qu'ils connoiſſent, comme ſi ces trois termes étoient les trois premiers d'une proportion, le dernier rapport de la proportion ſe trouve renverſé, lorſque le terme inconnu que l'on demande eſt véritablement un moyen de la proportion ; & c'eſt par cette raiſon que l'opération qu'on fait pour trouver le terme moyen inconnu, s'appelle *Regle de Trois inverſe.*

La Regle de Trois compoſée eſt celle dont l'énoncé renferme plus de trois termes connus. Mais nous verrons que tous ſes termes connus ſe réduiſent toûjours à trois entiérement connus ; & que le terme qu'on cherche eſt toûjours le quatriéme terme, ou un facteur du quatriéme terme d'une proportion, lorſque la regle eſt directe. Enfin nous verrons que le terme demandé eſt toûjours un terme moyen, ou le

le facteur d'un terme moyen, lorſque la Regle eſt inverſe.

De la Regle de Trois directe simple.

109 Nous venons de dire que l'objet d'une *Regle de Trois directe ſimple*, eſt de faire découvrir le quatriéme terme d'une proportion géométrique dont les trois premiers termes ſont ſimples & connus.

Par exemple, dans cette queſtion:

Si 37 toiſes d'un certain bois coûtent 148#; combien coûteront 30 toiſes du même bois?

Il eſt évident que le prix de 30 toiſes de bois, qui doit ſervir de réponſe à cette queſtion, eſt le quatriéme terme d'une proportion géométrique dont 37 toiſes, 30 toiſes, & 148#, ſont les trois premiers termes; parce qu'il eſt clair que 37 toiſes de bois doivent contenir 30 toiſes du même bois, comme le prix 148# des 37 toiſes, contient le prix demandé des 30 toiſes.

Il en ſera de même de cette autre queſtion qui n'eſt que le réciproque de la précédente.

Si pour 148# l'on a 37 toiſes de bois; combien pour 120# aura-t-on de toiſes du même bois?

Il eſt clair que le nombre de toiſes de bois, qui doit ſervir de réponſe à cette queſtion, eſt le quatriéme terme d'une proportion géométrique dont les trois premiers termes ſont 148#, 120# & 37 toiſes; parce que les deux nombres de toiſes du même bois, doivent être proportionnés aux deux ſommes d'argent 148# & 120# qui ſont deſtinées à les payer; c'eſt-à-dire que

148# deſtinées à payer 37 toiſes de bois, ſont à 120# deſtinées à payer le nombre cherché de toiſes du même bois.

Comme 37 toiſes de bois ſont au nombre cherché de toiſes du même bois.

Pour faire ces Regles de Trois, c'eſt-à-dire pour découvrir les quatriémes termes de ces deux proportions dont nous connoiſſons les trois premiers termes, nous avons vû (*N°.* 104.) qu'il faut multiplier le ſecond terme par le troiſiéme, ou le troiſiéme par le ſecond, ce qui donne le même produit ; & diviſer ce produit par le premier terme ; mais ceci préſente une difficulté qu'il eſt cependant facile de lever.

Si l'on ne conſidéroit que les multiplications qu'il faut faire, pour trouver les quatriémes termes des proportions données pour exemples ; on auroit des nombres de livres & de toiſes à multiplier les uns par les autres, ce qui ſeroit contre la regle de la multiplication, où nous avons fait voir que les facteurs d'une multiplication, ne peuvent pas être tous deux des nombres concrets.

Mais ſi l'on fait attention que les deux premiers termes dont les unités ſont de la même eſpece, n'influent ſur le quatriéme terme que par le nombre de fois que l'un contient l'autre, (puiſque (*N°.* 103.) pour avoir le quatriéme terme, il ſuffit de multiplier le troiſiéme par le quotient du ſecond diviſé par le premier, & que ce quotient eſt un nombre abſtrait ſemblable à celui qu'on auroit en diviſant un nombre abſtrait par un autre nombre abſtrait) l'on ſentira aiſément que ces deux termes concrets peuvent être regardés comme des nombres abſtraits.

En effet, puiſque 37 toiſes contiennent 30 toiſes de la même maniere que 37 unités abſtraites contiennent 30 unités abſtraites, & que 148^{tt} contiennent 120^{tt} de la même façon que 148 unités abſtraites contiennent 120 unités abſtraites ; il eſt évident que

les deux proportions données pour exemples peuvent être réduites aux ſuivantes, dont les deux premiers termes ſont des nombres abſtraits :

37 *ſont à* 30, *comme* 148^{tt} *ſont au quatriéme terme demandé ;*

Et 148 *ſont à* 120, *comme* 37 *toiſes de bois ſont au quatriéme terme demandé.*

A l'égard de la nature des unités du quatriéme terme qui eſt celui qu'on demande ; il eſt clair que ces unités ſeront de la même eſpece que celles du terme moyen qui n'eſt pas conſideré comme abſtrait. Car pour trouver le quatriéme terme, il faudra multiplier le moyen concret par l'autre moyen abſtrait, & diviſer enſuite le produit par le premier terme qui eſt abſtrait ; & l'on a vû que les unités d'un terme concret, ne changent point de nature, ſoit qu'on multiplie ou qu'on diviſe leur nombre par un nombre abſtrait.

On voit par tout ce qui vient d'être dit, que ſi les trois premiers termes d'une Regle de Trois ſont des nombres abſtraits, le dernier terme qu'on cherche ſera auſſi un nombre abſtrait.

Pour faire enſorte que les deux premiers termes de chaque proportion ſoient de même eſpece, & compoſent un rapport géométrique, nous avons été obligés de renverſer l'ordre du ſecond & du troiſiéme termes des énoncés des deux Regles de Trois priſes pour exemples ; mais il eſt clair que ce renverſement ne change rien à la valeur du quatriéme terme demandé, ainſi qu'il a été prouvé (*N*o. 105).

Comme le renverſement d'ordre du ſecond & du troiſiéme termes, n'eſt pas néceſſaire pour découvrir le quatriéme ; il nous arrivera ſouvent dans la ſuite de laiſſer les termes des Regles de Trois dans l'ordre de leur énoncé, lors même que

les deux premiers ne ſeront pas de la même eſpece; & dans ce cas, il faudra conſidérer le premier & le troiſiéme termes qui ſeront de même eſpece, comme des nombres abſtraits.

EXEMPLE PREMIER.

Si 37 toiſes de bois coûtent 148ᵗ; combien coûteront 30 toiſes du même bois?

Pour faire cette Regle, on n'aura aucune attention aux toiſes qui caractériſent les unités du premier & du troiſiéme termes, & l'on conſidérera ces termes comme des nombres abſtraits, c'eſt-à-dire comme ſi la queſtion étoit:

Si 37 coûtent 148ᵗ; combien coûteront 30?

Second terme 148ᵗ *à multiplier par le troiſiéme terme* 30

Produit 4440ᵗ { 37 *1ᵉʳ. terme, par lequel on diviſe* / 120ᵗ *quotient ou quatriéme terme*

37

74
74

0

On multipliera donc le ſecond têrme 148ᵗ par 30; ce qui donnera 4440ᵗ pour le produit qu'on diviſera par le premier terme 37; & l'on aura 120ᵗ pour le quotient, ou pour la valeur demandée des 30 toiſes.

EXEMPLE II.

Si pour 148ᵗ on a 37 toiſes de bois; combien pour 120ᵗ aura-t-on de toiſes du même bois?

On regardera le premier & le troiſiéme termes qui

ſont de même eſpece, comme des nombres abſtraits, & comme ſi la queſtion étoit ainſi propoſée :

Si pour 148 *unités on a* 37 *toiſes de bois ; combien pour* 120, *aura-t-on de toiſes du même bois ?*

Second terme 37^{T} *à multiplier par le troiſiéme terme* 120

740
37
Produit 4440^{T} { 148 1r. *terme, par lequel on diviſe*
444 30^{T} *quotient ou quatriéme terme*
0

On multipliera le ſecond terme 37^{T} par le troiſiéme 120, ce qui donnera 4440 toiſes ; & l'on diviſera ce produit par le premier terme 148 ; ce qui donnera 30^{T} pour la réponſe à la queſtion propoſée.

EXEMPLE III.

Si $7^{\#}$ $13^{\S}$ 4^{d} *ont gagné* $20^{\#}$ $6^{\S}$ 9^{d} ; *combien* $30^{\#}$ $13^{\S}$ 4^{d} *gagneront-ils ?*

On regardera les livres du premier & du troiſiéme terme comme des unités abſtraites, & l'on conſidérera leurs ſols & leurs deniers comme des fractions d'unités abſtraites ; enſorte que $13^{\S}$ 4^{d} étant les deux tiers d'une livre, on fera comme ſi la queſtion étoit énoncée ainſi.

Si $7\frac{2}{3}$ *ont gagné* $20^{\#}$ $6^{\S}$ 9^{d} ; *combien* $30\frac{2}{3}$ *gagneront-ils ?*

La queſtion étant ainſi réduite à de plus ſimples termes, on multipliera le ſecond terme $20^{\#}$ $6^{\S}$ 9^{d}

par le troiſiéme $30\frac{2}{3}$; ce qui donnera pour le produit total $623^{\#}\ 13^{ß}\ 8^{d}$ qu'il faudra diviſer par le premier terme $7\frac{2}{3}$: & l'on aura $81^{\#}\ 7^{ß}$ pour quotient, c'eſt-à-dire pour la réponſe à la queſtion propoſée.

$$
\begin{array}{llll}
20^{\#} & 6^{ß} & 9^{d} & \\
30 & \frac{2}{3} & & \\
\hline
600 & & & \\
9 & & & \\
 & 15 & & \\
 & 7 & 6 & \\
6 & 15 & 7 & \\
6 & 15 & 7 & \\
\hline
623^{\#} & 13^{ß} & 8^{d} & \left\{\begin{array}{l} 7\ \frac{2}{3} \\ \hline \end{array}\right. \\
\hline
1871^{\#} & 1^{ß} & & \left\{\begin{array}{l} 23 \\ \hline 81^{\#}\ 7^{ß} \end{array}\right. \\
184 & & & \\
\hline
31 & & & \\
23 & & & \\
\hline
8 & & & \\
20 & & & \\
\hline
161^{ß} & & & \\
161 & & & \\
\hline
0 & & &
\end{array}
$$

Il arrive ſouvent que les ſols & les deniers du premier & du troiſiéme termes ſont embarraſſans à réduire en fractions. Dans ce cas, on a plûtôt fait de réduire ces deux termes en deniers. Par exemple dans la queſtion propoſée, on auroit pû réduire en deniers le premier terme $7^{\#}\ 13^{ß}\ 4^{d}$, & le troiſiéme $30^{\#}\ 13^{ß}\ 4^{d}$; ce qui auroit changé ces deux

termes en ceux-ci 1840^{d} & 7360^{d}, & la queſtion propoſée en celle-ci :

Si 1840 *deniers ont gagné* 20^{tt} 6^{ſ} 9^{d} ; *combien* 7360 *deniers gagneront-ils ?*

Conſidérant dans cette queſtion le premier & le troiſiéme termes comme des nombre abſtraits, on multiplieroit le ſecond 20^{tt} 6^{ſ} 9^{d}, par le troiſiéme 7360 ; ce qui produiroit 149684^{tt}. Enſuite on diviſeroit ce produit par le premier terme 1840 : & l'on auroit comme ci-devant 81^{tt} 7^{ſ} pour le quotient, & pour la réponſe à la queſtion propoſée.

On pourroit convertir en deniers les trois premiers termes de la proportion ; & après avoir trouvé le quatriéme en deniers, on le réduiroit aux livres & ſols qu'il contiendroit. Mais cette maniere d'opérer obligeroit à deux réductions inutiles.

COROLLAIRE.

110 Puiſque (*N°.* 109.) pour trouver le quatriéme terme d'une Regle de Trois, il faut multiplier le ſecond terme par le troiſiéme, & diviſer leur produit par le premier, & qu'un nombre quelconque diviſé par l'unité, donne un quotient égal à ce nombre ; il eſt clair que ſi l'unité eſt le premier terme d'une Regle de Trois, on trouvera le quatriéme terme qu'on demande, en multipliant ſeulement le ſecond terme par le troiſiéme, ou le troiſiéme par le ſecond.

Quoiqu'une Regle de Trois qui a l'unité pour premier terme, ſe réduiſe à la multiplication des deux autres termes donnés, il faut pourtant remarquer que quand le premier terme eſt une unité concrete, on ne doit point le ſupprimer comme inutile, & qu'on ne peut pas propoſer la Regle comme une ſimple multiplication ; parce que l'unité concrete du premier terme ſert à fixer la nature des unités du produit des deux autres termes, en déterminant celui des moyens

dont les unités ſont de même eſpece qu'elle, à devenir un nombre abſtrait.

Par exemple ſi l'on propoſe ces deux Regles de Trois :

Si 1 toiſe de bois coûte 4ᵗᵗ 10ˢ 6ᵈ; combien coûteront 27 toiſes du même bois?

Si pour 1ᵗᵗ on a 27 toiſes de bois; combien pour 4ᵗᵗ 10ˢ 6ᵈ aura-t-on de toiſes du même bois?

L'unité étant le premier terme, & les deux autres termes donnés dont on peut changer l'ordre ſans inconvénient, étant les mêmes dans ces deux Regles, ſavoir 27 toiſes de bois, & 4ᵗᵗ 10ˢ 6ᵈ; *on aura également le quatriéme terme de chacune d'elles, en multipliant* 27 *toiſes par* 4ᵗᵗ 10ˢ 6ᵈ. *Mais les quatriémes termes de ces deux Regles de Trois, quoique produits par la multiplication des mêmes termes, ne ſont pas compoſés des mêmes unités; parce que le premier & le troiſiéme termes concrets, étant compoſés de toiſes dans la premiere Regle, & de livres dans la ſeconde; on pourra (N°.* 109.) *les rendre abſtraits, en ſupprimant la dénomination de* toiſes *dans la premiere & la dénomination de* livres *dans la ſeconde. Dans la premiere Regle, le produit de* 27 *toiſes par* 4ᵗᵗ 10ˢ 6ᵈ, *ſe réduira donc à* 4ᵗᵗ 10ˢ 6ᵈ *répétés* 27 *fois; ce qui donnera* 122ᵗᵗ 3ˢ 6ᵈ *pour le quatriéme terme de cette Regle : au lieu que dans la ſeconde, le produit de* 27 *toiſes par* 4ᵗᵗ 10ˢ 6ᵈ, *ſe réduira à* 27 *toiſes répétées un nombre de fois exprimé par* $4\frac{1}{2}$ *&* $\frac{1}{40}$ *ou par* $4\frac{21}{40}$; *ce qui donnera* 122 *toiſes* $\frac{7}{40}$ *pour le quatriéme terme de cette ſeconde regle.*

Donc dans une Regle de Trois qui a l'unité pour premier terme, & dont on aura par conſéquent le quatriéme terme en multipliant ſeulement le ſecond par le troiſiéme, on ne doit point négliger de conſidérer la nature de l'unité qui fait le premier terme; puiſqu'il n'y a que l'eſpece de cette unité qui puiſſe faire connoître de quelle nature ſeront

les unités du quatriéme. Ainſi une Regle de Trois dont le premier terme eſt une unité concrete, ne peut pas être regardée comme une ſimple multiplication.

Nous avons dit en parlant de la multiplication, que le multiplicande peut être compoſé d'unités de telle eſpece qu'on voudra ; mais que le multiplicateur ne peut être compoſé que d'unités abſtraites dont chacune ſignifie ſimplement une fois *& ne déſigne aucune eſpece de choſe. On propoſe cependant tous les jours des multiplications, dont les facteurs ſont tous deux énoncés comme des nombres concrets. On propoſe, par exemple de multiplier 27 toiſes par 4# 10ſ 6d, ſans rien dire de plus pour fixer l'eſpece des unités du produit. Or la multiplication de ces deux nombres pouvant donner des produits compoſés d'unités différentes, comme on vient de le voir dans les deux Regles de Trois ; il eſt clair qu'on ne pourra pas déterminer les unités du produit d'une ſemblable multiplication ; & par conſéquent le multiplicande & le multiplicateur d'une multiplication ne ſauroient être tous deux des nombres concrets.*

De la Regle de Trois directe composée.

III Une Regle de Trois eſt compoſée, lorſque ſon énoncé contient plus de trois nombres connus ; & quoiqu'elle ait plus de trois termes, on la nomme toûjours Regle de Trois ; parce qu'on peut la réduire à une Regle de trois termes réſultans de la multiplication de ceux que l'énoncé renferme.

Une Regle de Trois eſt d'autant plus compoſée qu'elle contient un plus grand nombre de termes. Pour la réduire à trois termes, il faut y conſidérer deux cauſes & deux effets ; écrire les uns ſous les autres tous les termes qui appartiennent à la premiere cauſe ; écrire auſſi les uns ſous les autres tous ceux qui compoſent le premier effet ; placer de même les

termes qui appartiennent à la ſeconde cauſe, ainſi que ceux qui compoſent le ſecond effet : en obſervant de diſpoſer alternativement les cauſes & leurs effets, & de commencer par la premiere cauſe ou par le premier effet, ſuivant que le terme qu'on cherche appartient au ſecond effet ou à la ſeconde cauſe. Enſuite il faut multiplier enſemble toutes les quantités qui compoſent chaque terme ; & l'on aura une Regle de Trois ſimple, dont les trois premiers termes ſeront connus, enſorte qu'on en pourra trouver le quatriéme terme (*N°.* 109.).

Mais après avoir ainſi réduit les termes d'une Regle de Trois compoſée, il peut arriver deux cas ; ou la quantité que l'on cherche ſera le quatriéme terme entier de la proportion, ou elle ne ſera qu'un facteur de ce quatriéme terme. Dans le premier cas, la réſolution de la Regle de Trois (*N°.* 109.) donnera évidemment la quantité qu'on demande. Dans le ſecond cas, lorſque le quatriéme terme ſera trouvé, on ſera obligé de le diviſer par les facteurs connus qui entrent dans ſa compoſition, pour avoir la quantité qu'on demande. On va prouver tout ce qu'on vient de dire dans les exemples ſuivans.

EXEMPLE PREMIER.

Si 20 perſonnes dépenſent 99# en 15 jours ;
Combien dépenſeront 60 perſonnes en 25 jours ?

Dans cette queſtion, il y a 5 termes connus ; & l'on cherche un ſixiéme terme qui eſt la dépenſe inconnue de 60 perſonnes en 25 jours. De ces ſix termes, il y en a deux (20 perſonnes & 15 jours) qui ſont la cauſe d'un premier effet, ou de la premiere dépenſe 99# ; & deux autres (60 perſonnes & 25 jours) qui ſont la cauſe d'un ſecond effet, ou de la ſeconde dé-

penſe inconnue. On mettra donc l'un ſous l'autre pour un premier terme, 20 perſonnes & 15 jours qui compoſent la premiere cauſe; puis on écrira pour deuxiéme terme le premier effet 99#. Enſuite on écrira l'un ſous l'autre pour un troiſiéme terme, les deux quantités 60 perſonnes & 25 jours qui compoſent la deuxiéme cauſe; & l'on aura pour quatriéme terme le ſecond effet qui eſt la dépenſe inconnue de 60 perſonnes en 25 jours.

1ere. *cauſe*	1er. *effet*	2e. *cauſe*	2e. *effet*
20 perſonnes 15 jours	99#	60 perſonnes 25 jours	inconnu

Comme les cauſes ſont proportionnelles à leurs effets, ces quatre termes dont le dernier eſt inconnu, compoſent une proportion géométrique. Ainſi l'on aura le quatriéme terme inconnu, ſavoir la dépenſe de 60 perſonnes en 25 jours, en multipliant le ſecond terme par le troiſiéme, & diviſant le produit par le premier.

Mais avant de faire cette Regle de Trois, il faut déterminer en quoi conſiſtent, ou à quoi ſe réduiſent le premier & le troiſiéme termes de la proportion. Pour cela, on remarquera que 20 perſonnes dépenſeront en 15 jours, autant que 15 fois 20 perſonnes en 1 jour; & que 60 perſonnes dépenſeront en 25 jours, autant que 25 fois 60 perſonnes en un jour: enſorte que le premier & le troiſiéme termes ſe réduiront à ces deux produits, 15 fois 20 perſonnes, & 25 fois 60 perſonnes. On aura donc pour réſoudre la queſtion propoſée, cette Regle de Trois.

Si 15 fois 20 perſonnes dépenſent 99#;
Combien dépenſeront 25 fois 60 perſonnes?

La Regle étant ainſi réduite, on trouvera le qua-

triéme terme qu'on demande, en ſuivant les préeeptes que nous avons donnés dans l'article précédent, après avoir réduit 15 fois 20 perſonnes ou 15 fois 20 en un ſeul terme 300, & 25 fois 60 perſonnes ou 25 fois 60 en un ſeul terme 1500. Enfin la Regle étant faite, on aura 495ᵗᵗ pour le quatriéme terme, c'eſt-à-dire pour la dépenſe de 60 perſonnes en 25 jours.

Si l'on fait attention à la ſolution que nous avons donnée de la queſtion propoſée; l'on reconnoîtra aiſément que dans toutes les Regles de Trois compoſées, il faut démêler les termes qui compoſent les deux cauſes d'avec les effets; mettre l'un ſous l'autre les termes de la premiere cauſe, & les multiplier l'un par l'autre; écrire enſuite le premier effet; puis mettre l'un ſous l'autre les termes qui compoſent la deuxiéme cauſe & les multiplier enſemble, & regarder ces trois termes comme les trois premiers termes d'une Regle de Trois.

1ere. *cauſe*	1er. *effet*	2e. *cauſe*	2e. *effet*
20 perſonnes 15 jours	99ᵗᵗ	60 perſonnes 25 jours	inconnu

300 : 99ᵗᵗ :: 1500 : R. 495ᵗᵗ.

Dans cet exemple, la quantité demandée s'eſt trouvée le quatriéme terme entier de la proportion. Dans l'exemple ſuivant, la quantité cherchée ne ſera qu'un facteur du quatriéme terme.

EXEMPLE II.

Si 20 perſonnes dépenſent 99ᵗᵗ en 15 jours;
En combien de jours 60 perſonnes dépenſeront-elles 495ᵗᵗ?

Dans cet exemple, la cauſe de la premiere dépenſe 99ᵗᵗ eſt compoſée de 20 perſonnes & de 15 jours, & la

cauſe de la ſeconde dépenſe 495ᵗ eſt compoſée de 60 perſonnes & d'un certain nombre inconnu de jours.

Le nombre inconnu de jours qu'on cherche, étant dans la cauſe de la deuxiéme dépenſe, on ne pourra faire trouver ce nombre de jours dans le quatriéme terme de la proportion, qu'en mettant la cauſe de la dépenſe après l'effet. Ainſi conformément à ce que nous avons dit dans l'exemple précédent, & à ce que nous venons de remarquer, l'on écrira comme il ſuit les termes donnés de la queſtion.

1er. *effet*	1ere. *cauſe*	2e. *effet*	2e. *cauſe*
99ᵗ	20 perſonnes 15 jours	495ᵗ	60 perſonnes nombre inconnu de jours

Comme les deux quantités qui produiſent chaque terme compoſé, doivent être multipliées l'une par l'autre, & que 60 perſonnes ſont dans le même quatriéme terme avec le nombre de jours qu'on demande ; on cherchera ce quatriéme terme tout entier : & quand il ſera trouvé, on le diviſera par 60, pour avoir le nombre inconnu de jours demandé ; parce que ce quatriéme terme eſt compoſé de ce nombre de jours multiplié par 60.

Pour découvrir ce quatriéme terme compoſé, on regardera tous les autres termes, excepté 15 jours, comme des nombres abſtraits : & après avoir multiplié 15 jours par 20, ce qui donnera 300 jours pour le ſecond terme compoſé ; l'on multipliera ce ſecond terme 300 jours par le troiſiéme 495 ; & l'on aura 148500 jours pour le produit. Enfin ce produit étant diviſé par le premier terme 99, l'on trouvera 1500 jours pour le quotient, & pour le quatriéme terme entier de la proportion.

Comme ce nombre 1500 jours eſt fait du nombre demandé de jours, multiplié par 60, on diviſera 1500 jours par 60; & l'on aura au quotient 25 jours pour le nombre de jours qu'on demande.

On peut remarquer ici, qu'on auroit rendu la ſolution plus ſimple, en décompoſant les deux dépenſes de la queſtion, comme il ſuit.

1°. *L'hypothèſe de l'exemple propoſé, eſt que 20 perſonnes dépenſent 99# en 15 jours. Ainſi en diviſant 99# par 20, l'on auroit eu 4# 19ß pour la dépenſe d'une perſonne en 15 jours; ce qui auroit rendu l'hypothèſe plus ſimple.*

2°. *On demande en combien de jours 60 perſonnes dépenſeront 495#. Or 495# ne dureront pas plus de temps à 60 perſonnes, que la ſoixantiéme partie de 495# qui eſt 8# 5ß, durera à une perſonne. Ainſi la queſtion propoſée ſe ſeroit réduite à celle-ci.*

Si une perſonne dépenſe 4# 19ß en 15 jours;

En combien de temps la même perſonne dépenſera-t-elle 8# 5ß?

La Regle de Trois ſe ſeroit trouvée directe ſimple, & l'on auroit eu 25 jours pour la réponſe à la queſtion.

EXEMPLE III.

Si 60 hommes, en travaillant 8 heures par jour, font en 12 jours un foſſé long de 10 toiſes, large de 5 pieds, & profond de 7 pieds;

On demande quelle ſera la longueur d'un foſſé, large de 4 pieds, profond de 5 pieds, que 50 hommes feront en 15 jours dans le même terrein, en travaillant 6 heures par jour.

1°. Il eſt clair que 60 hommes, 12 jours pendant leſquels ils travaillent, & 8 heures qu'ils emploient par jour, compoſent par leur multiplication la cauſe du premier foſſé; parce que 60 hommes font 12 fois autant d'ouvrage en 12 jours, qu'ils en feroient en

à jour. C'eſt pourquoi les 60 hommes doivent être multipliés par 12 : & comme il y aura encore 8 fois autant d'ouvrage de fait, en travaillant 8 heures par jour, qu'on en feroit en travaillant 1 heure ; il faut encore multiplier par 8 le prémier produit de 60 hommes par 12.

2°. Le foſſé long de 10 toiſes, large de 5 pieds, & profond de 7 pieds, étant conſideré comme un parallélépipede, eſt un effet compoſé de la multiplication de ſes trois dimenſions, 10 toiſes, 5 pieds & 7 pieds.

3°. 50 hommes, 15 jours pendant leſquels ils travaillent, & les 6 heures qu'ils emploient par jour, compoſent par leur multiplication la cauſe du deuxiéme foſſé, par les raiſons que nous avons données en examinant la cauſe du premier foſſé.

4°. Enfin le ſecond foſſé, compoſé de la multiplication de ſa longueur inconnue par ſa largeur & par ſa profondeur, eſt l'effet de la deuxiéme cauſe.

Ainſi l'on diſpoſera les uns ſous les autres les facteurs de chaque cauſe, & l'on rangera pareillement les uns ſous les autres les facteurs de chaque effet comme ici.

1ere. *cauſe*	1er. *effet*	2e. *cauſe*	2e. *effet*
60 hommes	10^T	50 hommes	longueur cherchée
12 jours	5^P	15 jours	4^P
8 heures	7^P	6 heures	6^P

5760 : 350^T :: 4500 : 4e *terme*

Enſuite on multipliera enſemble les facteurs des trois premiers termes, pour avoir des termes ſimples ; & l'on conſidérera tous ces facteurs comme des nombres abſtraits, excepté celui 10 toiſes du premier effet, pour pouvoir trouver en toiſes la longueur du foſſé. Enfin l'on multipliera le ſecond terme réduit

350 toiſes, par le troiſiéme réduit 4500, ce qui produira 1575000 toiſes; & ayant diviſé ce produit par le premier terme réduit 5760, l'on aura au quotient 273 toiſes 2 pieds 7 pouces, à peu de choſe près, pour le quatriéme terme compoſé.

Mais ce quatriéme terme eſt le produit de la longueur du foſſé, multipliée par le produit 4×6 ou 24 de ſa largeur & de ſa profondeur. Ainſi en diviſant 273 toiſes 2 pieds 7 pouces par 24, on aura au quotient 11 toiſes 2 pieds 4 pouces, à peu de choſe près, pour la longueur demandée du foſſé.

Exemple IV.

On occupe trois ouvriers pour faire un foſſé, & les forces de ces trois ouvriers ſont telles, que le premier peut faire le foſſé en 11 jours; le ſecond peut le faire en 22 jours; le troiſiéme peut le faire en 33 jours.

On demande quel temps il faudra à ces trois hommes enſemble pour faire le foſſé.

Suivant l'énoncé du Problême, le premier ouvrier fera $\frac{1}{11}$ du foſſé en 1 jour; le ſecond ouvrier fera $\frac{1}{22}$ du même foſſé en 1 jour; & le troiſiéme ouvrier fera $\frac{1}{33}$ du foſſé auſſi en 1 jour. Ainſi les trois ouvriers feront $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{22}$ & $\frac{1}{33}$ du foſſé en un jour. Ajoûtant enſemble ces trois fractions ou parties de foſſé, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{22}$, $\frac{1}{33}$, après les avoir réduites à la même dénomination, l'on trouvera que leur ſomme eſt $\frac{121}{726}$ ou $\frac{1}{6}$; c'eſt-à-dire que les trois ouvriers travaillant enſemble, feront $\frac{1}{6}$ du foſſé en un jour.

Comme ces ouvriers feront d'autant plus d'ouvrage qu'ils travailleront plus de temps, les quantités d'ouvrage ſeront directement proportionnelles au temps employé à les faire. Ainſi prenant le foſſé pour l'unité, on fera cette proportion.

Comme $\frac{1}{6}$ du foſſé, eſt à 1 qui repréſente le foſſé entier;

Ainſi

Ainſi 1 jour, temps employé à faire $\frac{1}{6}$ du foſſé, eſt au nombre de jours que les trois ouvriers emploieront à faire le foſſé entier.

Donc pour trouver le nombre de jours que les trois ouvriers emploieront a faire le foſſé, il faudra multiplier le troiſiéme terme 1 jour par le deuxiéme 1 qui repréſente le foſſé, ce qui produira 1 jour; & diviſer ce produit 1 jour par le premier terme, c'eſt-à-dire par la fraction $\frac{1}{6}$, ou le multiplier par 6, ce qui donnera 6 jours pour le temps demandé.

De la Regle de Trois inverse simple.

112 Nous avons dit qu'une Regle de Trois eſt inverſe, lorſque des trois termes donnés, il y en a deux qui ſont les extrêmes d'une proportion; enſorte que le terme qu'on demande, eſt un moyen de la même proportion. Et comme les termes de la *Regle de Trois* ſont donnés de ſuite; on eſt obligé pour avoir ce moyen, de multiplier le premier terme par le ſecond qui dans le fond n'eſt que le quatriéme de la proportion, & de diviſer le produit par le troiſiéme terme.

Exemple.

Si 30 hommes emploient 40 jours à faire un ouvrage;
Combien de jours 10 hommes emploieront-ils pour faire le même ouvrage?

Comme les 30 hommes & les 10 hommes ont le même ouvrage à faire, il faudra d'autant plus de temps, qu'il y aura moins d'hommes; c'eſt-à-dire que deux fois moins d'hommes ſeront deux fois plus de temps; trois fois moins d'hommes ſeront trois fois plus de temps &c. Ainſi 30 qui eſt le premier nombre d'hommes, ſera au ſecond 10, comme le temps

inconnu employé par le ſecond nombre d'hommes, ſera au temps 40 jours employé par le premier nombre d'hommes.

La proportion étant ainſi énoncée, le temps demandé ſe trouve le troiſiéme terme. On aura donc (*N°.* 107.) la valeur de ce terme, en multipliant l'un par l'autre les extrêmes 30 & 40 jours, & en diviſant le produit par le terme moyen 10 qui eſt donné; c'eſt-à-dire que le temps demandé ſera $\frac{30 \times 40 \text{ jours}}{10}$, ce qui ſe réduit à 120 jours.

Mais les deux termes 30 & 40 jours qu'on a multipliés, ſont le premier & le ſecond termes de la Regle de Trois inverſe propoſée dont trois termes 30 hommes, 40 jours & 10 hommes ſont écrits de ſuite. Donc pour avoir le terme inconnu d'une Regle de Trois inverſe, il faut multiplier le premier terme par le deuxiéme, & diviſer le produit par le troiſiéme.

REMARQUE.

113 Comme les inverſions ſont embarraſſantes, il eſt à propos de faire remarquer que la Regle de Trois inverſe ſe réduit à une Regle de Trois compoſée dont les termes ſont égaux deux à deux.

Par exemple dans la queſtion propoſée, 1°. 30 hommes & 40 jours compoſent la cauſe de l'ouvrage. 2°. 10 hommes & le nombre demandé de jours qu'ils emploient à travailler, ſont la cauſe du même ouvrage. Ainſi nommant l'ouvrage 1, l'on aura:

30 fois 40 jours eſt à 1;

Comme 10 fois le nombre de jours cherché eſt à 1.

Donc 30 fois 40 jours ſont égaux à 10 fois le nombre de jours demandé, puiſqu'ils contiennent également l'unité.

D'où il ſuit que la dixiéme partie de 30 fois 40 jours, c'eſt-à-dire 120 jours eſt le temps demandé.

De la Regle de Trois inverse composée.

114 La Regle de Trois inverſe compoſée ne differe de la Regle de Trois inverſe ſimple, qu'en ce que les termes connus de celle-ci ſont ſimples, & que les termes connus de celle-là, ſont faits de la multiplication de pluſieurs autres; en ſorte qu'après avoir réduit la Regle de Trois inverſe compoſée, à trois termes entiérement connus, elle eſt ſemblable à la Regle de Trois inverſe ſimple.

Exemple.

Si 30 hommes en travaillant 8 heures par jour, font un ouvrage en 40 jours;

En combien de jours 10 hommes feront-ils le même ouvrage, en travaillant 6 heures par jour?

Comme les 30 hommes & les 10 hommes doivent faire le même ouvrage, les 10 hommes emploieront d'autant plus de jours que leur nombre eſt moindre, & qu'ils travailleront moins d'heures par jour. Ainſi l'on aura cette proportion.

Comme 30 hommes travaillans pendant 8 heures,

Sont à 10 hommes travaillans pendant 6 heures;

Ainſi le nombre inconnu de jours que les 10 hommes emploieront,

Sera à 40 jours que les 30 hommes emploient.

Le premier terme de cette proportion ſe réduira à 8 fois 30 hommes, ou 240 hommes; & le ſecond ſe réduira à 6 fois 10 hommes, ou 60 hommes; parce que 30 hommes travaillans pendant 8 heures, font le même ouvrage, que 8 fois 30 hommes travaillans pendant 1 heure; & que 10 hommes travaillans pendant 6 heures, font le même ouvrage, que 6 fois 10 hommes travaillans pendant 1 heure. Ainſi la proportion ſe réduira à celle-ci.

240 *hommes ſont à* 60 *hommes; comme le nombre inconnu de jours eſt à* 40 *jours.*

Et en conſidérant les deux nombres d'hommes, comme des nombres abſtraits, cette proportion ſe réduira encore à celle-ci :

240 *ſont à* 60; *comme le nombre de jours cherché, eſt à* 40 *jours.*

On aura donc le nombre de jours demandé, en multipliant 40 jours par 240, & diviſant le produit 9600 jours par 60; ce qui donnera 160 jours.

REMARQUE.

115. L'ordre dans lequel il faut prendre les deux nombres de jours dont l'un eſt inconnu, étant oppoſé à celui ſuivant lequel on a pris les deux nombres de travailleurs, on peut être expoſé à ſe tromper quand on ne fait point aſſez d'attention à ce renverſement d'ordre. Ainſi l'on fera toûjours bien d'éviter les inverſions, en conſidérant dans la queſtion deux cauſes & deux effets, & en comparant directement les cauſes avec leurs effets.

Dans la queſtion propoſée :

Si 30 *hommes, en travaillant* 8 *heures par jour, font un ouvrage en* 40 *jours; en combien de jours* 10 *hommes feront-ils le même ouvrage, en travaillant* 6 *heures par jour?*

On remarquera aiſément que 30 hommes, 8 heures & 40 jours, compoſent par leur multiplication la premiere cauſe de l'ouvrage qu'ils font, & que 10 hommes, 6 heures & le nombre de jours que l'on cherche, compoſent auſſi par leur multiplication la cauſe du même ouvrage que ces 10 hommes doivent faire. Or les deux effets ou les deux ouvrages étant égaux, leurs cauſes ſont égales. Donc en regardant

comme nombres abſtraits tous les nombres donnés, excepté celui des jours; on trouvera que 30×8×40 jours, ou 9600 jours, ſont égaux à 10 fois 6 fois, ou à 60 fois le nombre de jours qu'on cherche. Ainſi la ſoixantiéme partie de 9600 jours, c'eſt-à-dire 160 jours, ſera le nombre de jours demandé.

Lorſque tous les termes d'une Regle de Trois compoſée inverſe, peuvent ſe réduire à deux cauſes qui produiſent un même effet; on peut donc propoſer pour Regle générale de multiplier enſemble tous les nombres qui compoſent la premiere cauſe, en ne regardant comme concret que celui qui a des unités ſemblables à celles du nombre que l'on cherche; de diviſer enſuite le produit, par le produit des termes qui ſont donnés dans la ſeconde cauſe, en regardant ces termes comme des nombres abſtraits, & de prendre pour le quotient, le terme demandé.

CHAPITRE III.

Des Regles de Compagnie.

116 LORSQU'ON ſe propoſe de partager un nombre donné, en parties proportionnelles à celles d'un autre nombre diviſé comme on voudra; l'opération qu'on fait pour réſoudre ce Problême, s'appelle une *Regle de Compagnie.*

On voit par cette définition, que pour trouver chacune des parties du nombre qu'on doit partager, il faut faire cette Regle de Trois.

Comme le nombre déjà diviſé eſt à l'une de ſes parties: Ainſi le nombre qu'il faut diviſer eſt à une de ces parties, correſpondante à celle qu'on a priſe pour ſecond terme.

Il faut donc pour une Regle de Compagnie, faire autant de Regles de Trois moins une, qu'il faut trouver de parties différentes dans le nombre qu'on doit diviſer. Nous diſons *autant de Regles de Trois moins une*, parce qu'après avoir trouvé toutes les parties qui précédent la derniere, & avoir retranché ces parties de la totalité du nombre, le reſte ſera pour la derniere partie du même nombre. Ainſi l'on peut ſe diſpenſer de faire une Regle de Trois pour trouver cette derniere partie.

Une Regle de Compagnie peut être ſimple ou compoſée. Elle eſt ſimple, lorſque les termes des Regles de Trois qu'il faut faire, ſont ſimples; & elle eſt compoſée, lorſque les termes des Regles de Trois dont dépend la ſolution, ſont compoſés. Comme nous nous ſommes aſſez étendus ſur les différentes Regles de Trois, quelques exemples ſuffiront pour montrer comment on peut faire toutes les Regles de Compagnie ſimples ou compoſées, qui ſe rapportent à des Regles de Trois.

EXEMPLE PREMIER.

Trois marchands de blé ſe ſont aſſociés;
Le premier pour 300 *ſacs de blé;*
Le ſecond pour 250;
Le troiſiéme pour 450.
La totalité de leurs grains a été vendue 12700^{tt}.
On demande combien il revient à chacun.

Il eſt clair que pour réſoudre cette queſtion, il faut partager 12700^{tt} en parties proportionnelles à celles 300 ſacs, 250 ſacs, 450 ſacs que les marchands ont mis en commun; & que la totalité des ſacs doit être à la totalité du prix, comme chaque nombre

particulier de ſacs, eſt à ſa valeur ou à ce qui revient à chaque marchand.

On ajoûtera donc enſemble les trois nombres de ſacs de blé mis en ſociété ; ce qui donnera 1000 ſacs de blé dont le prix eſt 12700ᵗ : puis on fera ces trois proportions.

1°. *Si*	1000 *ſacs valent*	12700ᵗ,	
Combien	300 *ſacs valent-ils ?*	R. 3810ᵗ.	
2°. *Si*	1000 *ſacs valent*	12700ᵗ,	
Combien	250 *ſacs valent-ils ?*	R. 3175ᵗ.	
3°. *Si*	1000 *ſacs valent*	12700ᵗ,	
Combien	450 *ſacs valent-ils ?*	R. 5715ᵗ.	

On auroit pû ſe diſpenſer de faire la derniere Regle de Trois, pour trouver le prix du blé du troiſiéme marchand. Car en ajoûtant les premieres parties 3810ᵗ & 3175ᵗ, & ſouſtrayant leur ſomme 6985ᵗ du prix total 12700ᵗ, on auroit eu 5715ᵗ de reſte, pour ce qui revient au troiſiéme marchand.

Si l'on avoit à trouver un grand nombre de parties proportionnelles, il vaudroit mieux chercher la partie du nombre à diviſer qui répond à une unité du nombre total déjà diviſé, & multiplier enſuite par cette partie, chaque partie du nombre diviſé. On auroit par ce moyen toutes les parties proportionnelles qu'on demande, ſans faire autant de Regles de Trois qu'on a de nombres à trouver ; ce qui épargneroit autant de diviſions qu'il faudroit faire de Regles de Trois.

Par exemple, dans la queſtion propoſée, il faudroit chercher le prix d'un ſac de blé par cette proportion.

Si 1000 *ſacs valent* 12700ᵗ ; *combien vaut* 1 *ſac ?*

Et l'on trouveroit 12# 14ß, en diviſant le ſecond terme 12700# par le premier 1000.

Ayant trouvé 12# 14ß pour le prix d'un ſac, on multiplieroit 12# 14ß par 300; & l'on auroit 3810# pour 300 ſacs.

On multiplieroit 12# 14ß par 250; & l'on auroit 3175# pour 250 ſacs.

Enfin l'on multiplieroit 12# 14ß par 450; & l'on auroit 5715# pour 450 ſacs.

EXEMPLE II.

Un négociant a mis 100000# *dans le commerce. Au bout de 6 mois, un ſecond négociant s'aſſocie avec le premier pour* 25000# *dans les* 100000#; *& au bout de deux autres mois, le premier négociant a cédé à un troiſiéme négociant une part de* 30000# *dans la portion qui lui reſtoit des* 100000#. *Enfin au bout de 6 autres mois, les* 100000# *ont gagné* 18000#.

Les conditions de la ſociété étant que chacun aura part au profit à raiſon de ſa miſe, & du temps qu'elle aura été dans le commerce, ſans avoir égard à l'intérêt de l'intérêt; on demande combien chaque négociant a gagné.

Suivant l'énoncé de la queſtion, il y a toûjours eu pendant 14 mois 100000# dans le commerce, qui ſont cenſées avoir gagné pendant ces 14 mois, autant que 14 fois 100000# ou 1400000# auroient gagné pendant un mois. Ainſi au lieu de prendre 100000# pendant 14 mois pour la cauſe du gain 18000#, on peut prendre 1400000# pour la cauſe de ce gain.

Le ſecond négociant ayant pris au bout de 6 mois une part de 25000# dans les 100000#, les 25000# de ce négociant ont été 8 mois dans le commerce, & auront gagné pendant 8 mois, autant que 8 fois

25000#, ou autant que 200000# auroient gagné dans un mois. Ainſi au lieu de prendre 25000# pendant 8 mois pour la cauſe du gain que doit faire le deuxiéme négociant, nous prendrons 200000# pour la cauſe ſimple de ce gain.

Le troiſiéme négociant ayant pris au bout de deux autres mois une part de 30000# dans les 100000#, les 30000# de ce négociant auront été encore 6 mois dans le commerce, & auront gagné pendant ces 6 mois, autant que 6 fois 30000# ou 180000# auroient gagné pendant un mois. Ainſi au lieu de prendre 30000# pendant 6 mois pour la cauſe du gain de ce troiſiéme négociant, nous prendrons 180000# pour la cauſe ſimple de ſon gain.

Mais les cauſes des gains ſont proportionnelles aux gains.

On trouvera donc le gain du ſecond négociant par cette Regle de Trois.

Comme 1400000# *cauſe réduite du gain total,*

Eſt au gain total 18000#:

Ainſi 200000# *cauſe réduite du gain du ſecond négociant,*

Eſt au gain de ce ſecond négociant.

Or cette regle étant faite, comme nous l'avons expliqué, l'on trouvera 2571# 8ſ 7ᵈ, à peu de choſe près, pour le gain du ſecond négociant.

Pour trouver le gain du troiſiéme négociant, qui a eu 30000# dans le commerce pendant 6 mois, on fera cette ſeconde proportion.

Comme 1400000# *cauſe réduite du gain total,*

Eſt au gain total 18000#:

Ainſi 180000# *cauſe réduite du gain du troiſiéme négociant,*

Eſt au gain de ce négociant.

La regle étant faite, on trouvera, à peu près,

2314# 5ß 8♃ pour le gain du troiſiéme négociant.

Pour avoir le gain du premier négociant, il n'y aura point de Regle de Trois à faire, parce que le deuxiéme ayant gagné 2571# 8ß 7♃

Et le troiſiéme ayant gagné 2314# 5ß 8♃

La ſomme de ces deux gains ſera 4885# 14ß 3♃

Et ſi du gain total 18000#

On ôte la ſomme de ces deux gains 4885# 14ß 3♃

Il reſtera pour le gain du premier négociant 13114# 5ß 9♃

CHAPITRE IV.

Des Regles de Fauſſes poſitions.

117 LEs Regles de Fauſſes poſitions reſſemblent à des Regles de Compagnie, en ce que par leur moyen l'on partage un nombre donné, ou une partie d'un nombre donné, en parties proportionnelles à celles d'un autre nombre que l'on prend à volonté, en ſuivant cependant les conditions de la queſtion.

On diſtingue deux ſortes de *Regles de Fauſſes poſitions*, ſavoir les *Regles d'Une Fauſſe poſition* & les *Regles de Deux Fauſſes poſitions*.

Dans les Regles d'Une Fauſſe poſition, l'on ne fait qu'une ſuppoſition de parties proportionnelles à celles dans leſquelles il faut partager le nombre propoſé.

Dans les Regles de deux Fauſſes poſitions, l'on fait réellement deux ſuppoſitions qui ſont toutes deux fauſſes, & l'on en conclud les véritables parties du nombre propoſé à diviſer.

DES REGLES D'UNE FAUSSE POSITION.

118 Les Regles d'Une Fauſſe poſition conſiſtent, comme nous l'avons dit, à ſuppoſer des parties proportionnelles à celles du nombre qu'on doit diviſer. Ces parties ſuppoſées font une fauſſe poſition, en ce qu'elles ne ſont pas égales aux parties dans leſquelles le nombre propoſé doit être diviſé. Mais comme ces mêmes parties ſuppoſées ſont proportionnelles à celles qu'on demande; la totalité de ces parties ſuppoſées eſt à chacune d'elles en particulier; comme le nombre donné à diviſer, eſt à chacune des parties que l'on demande. Ainſi lorſqu'on a une fois ſuppoſé des parties proportionnelles à celles que l'on demande, & qu'on en a fait la ſomme, le reſte de l'opération ſe fait comme la Regle de Compagnie, par des Regles de Trois.

EXEMPLE PREMIER.

Trouver un nombre dont la moitié, le tiers & le quart, faſſent enſemble 52.

On choiſira un nombre dont on puiſſe prendre aiſément la moitié, le tiers & le quart; & pour avoir ce nombre, on multipliera enſemble les dénominateurs des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ou plus ſimplement les dénominateurs 4 & 3, parce que le dénominateur 2 eſt contenu dans 4; ce qui donnera 12. On prendra donc la moitié de 12 qui eſt 6; le tiers de 12 qui eſt 4; & le quart de 12 qui eſt 3. Ajoûtant enſemble toutes ces parties de 12, on aura 13.

Enſuite on fera cette Regle de Trois ſimple directe.

Si 13 *contiennent la moitié, le tiers & le quart de* 12

De quel nombre 52 *contiendra-t-il la moitié, le tiers, & le quart?*

On aura donc le nombre demandé, en multipliant le ſecond terme 12 par le troiſiéme 52, & en diviſant le produit 624 par le premier nombre 13; ce qui donnera 48.

Ainſi 48 eſt le nombre demandé dont la moitié, le tiers & le quart font enſemble 52.

EXEMPLE II.

Un pere en partageant ſon bien à trois enfans, en a laiſſé la moitié à l'aîné, le tiers au ſecond, & 20000^{tt} au troiſiéme. On demande le bien que ce pere de famille avoit.

Suppoſons que le bien du pere de famille ſoit 1. La moitié qu'il a laiſſée à l'aîné de ſes enfans ſera $\frac{1}{2}$; & le tiers qu'il a laiſſé au ſecond ſera $\frac{1}{3}$. Ces deux parties réduites à la même dénomination ſeront $\frac{3}{6}$ & $\frac{2}{6}$ dont la ſomme eſt $\frac{5}{6}$. Ces deux parts ou leur ſomme $\frac{5}{6}$ étant retranchée du bien total 1, il reſtera $\frac{1}{6}$ pour la part du troiſiéme enfant: & comme les parties ſont proportionnelles aux totalités, on fera cette Regle de Trois.

Comme $\frac{1}{6}$ part du troiſiéme enfant, eſt au bien ſuppoſé 1;

Ainſi 20000^{tt} véritable part du troiſiéme enfant, eſt au véritable bien que le pere de famille avoit.

La Regle de Trois étant faite, en multipliant ſeulement le troiſiéme terme par 6; parce que le ſecond terme 1 ne multiplie point, & que la diviſion par $\frac{1}{6}$ eſt une multiplication par 6; on trouvera 120000^{tt} pour le bien que le pere de famille avoit.

EXEMPLE III.

Trois perſonnes ont partagé 100^{tt}, de maniere que:

La ſeconde a eu 2 fois autant que la premiere.

La troiſiéme a eu autant que la premiere & la ſeconde enſemble.

On demande combien chacune a eu.

Si la part du premier avoit été 1

La part du ſecond qui a eu deux fois autant que le premier auroit été 2

La part du troiſiéme qui a eu autant que les deux premiers enſemble, auroit été 3

Et la totalité des parts ou du bien partagé auroit été 6

La queſtion ſe réduit donc à partager 100ᵗ en parties proportionnelles à celles 1, 2, 3, dans leſquelles 6 auroit été partagé. Ainſi l'on trouvera les parties de 100ᵗ par la proportion ſuivante, c'eſt-à-dire par trois Regles de Trois.

Comme le nombre total ſuppoſé 6

Eſt à ſes parties { 1 / 2 / 3

Ainſi le nombre 100ᵗ *qu'on a partagé*

Eſt à ſes parties { 16ᵗ 13ˢ 4ᵈ / 33ᵗ 6ˢ 8ᵈ / 50ᵗ 0ˢ 0ᵈ

DES REGLES DE DEUX FAUSSES POSITIONS.

119 Dans une Regle de Deux Fauſſes poſitions, il s'agit de partager un nombre en deux parties, & de partager encore une de ces parties en parties proportionnelles à d'autres parties ſuppoſées.

Pour faire ces deux partages, on fait deux fauſſes ſuppoſitions, comme nous allons le voir dans l'exemple ſuivant.

EXEMPLE.

Trois perſonnes ont partagé 120#, *de maniere que la ſeconde a eu deux fois autant que la premiere, &* 3# *de plus. La troiſiéme a eu autant que les deux autres, &* 4# *de plus.*

On demande combien chacun des partageans a eu.

Si la part du premier avoit été 1#

La part du ſecond qui a eu deux fois autant que le premier & 3# de plus, auroit été 2# & 3# ou 5#

La part du troiſiéme qui a eu autant que les deux autres & 4# de plus, auroit été 6# plus 4# ou 10#

Enfin la totalité des parts auroit été 16#

Voilà la premiere ſuppoſition qui eſt fauſſe, non ſeulement en ce que les parties ſuppoſées ne ſont pas les véritables, mais encore en ce que ces parties ne ſont pas proportionnelles à celles dans leſquelles il faut diviſer 120#; parce que les deux dernieres parties ſuppoſées, renferment chacune deux autres parties, dont une eſt relative à la premiere part 1#, & dont l'autre eſt déterminée. La ſeconde part 5#, par exemple, eſt compoſée de deux parties 2# & 3#, dont l'une 2# doit être double de la premiere part ſuppoſée, & changeroit de valeur proportionnellement aux variations qui arriveroient à la premiere part 1#; au lieu que la deuxiéme partie 3# eſt une grandeur déterminée qui ne changeroit point, en changeant la valeur de la premiere part 1#.

En conſidérant que chaque part eſt ainſi compoſée de deux parties dont l'une eſt relative à la premiere part ſuppoſée, & dont l'autre eſt une gran-

deur déterminée qui ſeroit toujours la même, quelle que fut la premiere part ; on examinera quelle eſt la portion du nombre 120# qui contient les parties des parts proportionnelles à la premiere part ſuppoſée ; & quelle eſt la portion du même nombre 120# qui contient les parties déterminées de ces parts : & lorſque cette derniere portion de 120# ſera découverte, on la retranchera de 120#, pour n'avoir que la premiere portion qui contient les premieres parties des parts.

Pour déterminer cette ſeconde portion de 120#, on fera une ſeconde ſuppoſition dans laquelle n'entreront point les parties déterminées 3# & 4# qui accroiſſent les parts ; l'on fera, dis-je comme ſi la queſtion étoit ainſi propoſée.

Trois perſonnes ont partagé 120#.
La ſeconde a eu deux fois autant que la premiere.
La troiſieme a eu autant que les deux autres.

On ſuppoſera, comme on a déja fait, que la part du premier partageant eſt 1#
La part du ſecond ſera 2#
La part du troiſiéme ſera 3#
Et la ſomme de ces trois parts ſera 6#

Cette ſeconde ſuppoſition ſera encore fauſſe, non ſeulement parce que les parties ſuppoſées ne ſeront pas les véritables, mais encore parce qu'elles ne ſeront pas proportionnelles aux véritables parts des partageants.

Comme les parts qu'on a priſes dans cette ſeconde ſuppoſition, ne contiennent point les parties déterminées 3# & 4# dont les parties proportionnelles des parts ſont accrues ; leur totalité 6# ne contiendra pas non plus le réſultat de ces parties déterminées ; au

lieu que la totalité 16# des parts de la premiere fauſſe poſition, contenoit le réſultat de ces parties déterminées.

Donc ſi l'on retranche la ſomme 6# des trois parts de la deuxiéme ſuppoſition, de la ſomme 16# des trois parts de la premiere ſuppoſition; le reſte 10# ſera la portion pour laquelle les parties déterminées 3# & 4# entrent dans la ſomme 120# qu'il faut partager: d'où il ſuit qu'en retranchant 10# de 120#, le reſte 110# ſera la portion qui contient les parties des parts, relatives à la premiere part.

Après cet expoſé, il ne ſera pas difficile de trouver la part du premier partageant par la ſeconde fauſſe ſuppoſition, où les parts ſont ſuppoſées 1, 2, 3 dont la totalité eſt 6; on trouvera dis-je la part du premier partageant, ſur laquelle ſont fondées les deux autres, par cette Regle de Trois.

Comme la ſomme 6# *des trois parts ſuppoſées.*

Eſt à la premiere part 1#;

Ainſi 110#,

Eſt à la part du premier.

La Regle de Trois, étant faite en regardant les deux premiers termes comme des nombres abſolus, on trouvera que

La part du premier partageant eſt 18# 6ß 8ª.

A l'égard des deux autres parts, on les trouvera en ſuivant les conditions de la queſtion, comme il ſuit.

Le ſecond doit avoir deux fois autant que le premier & 3# de plus: ainſi il aura 36# 13ß 4ª & 3# de plus, c'eſt-à-dire qu'il aura 39# 13ß 4ª.

Le troiſiéme doit avoir autant que les deux premiers & 4# de plus: il aura donc d'abord 58# & enſuite 4#: ainſi il aura en tout 62#.

Les trois parts demandées ſont donc 18# 6ß 8ª, 39# 13ß 4ª, & 62#.

ÉLÉMENS

ELEMENS D'ARITHMÉTIQUE.

LIVRE VI.

De la Regle d'Alliage.

120 LA Regle d'Alliage eſt une opération par laquelle on mêle enſemble pluſieurs quantités de différentes valeurs, pour en compoſer d'autres d'une valeur moyenne.

Lorſque l'on connoit le nombre & la valeur des parties qui entrent dans l'alliage, & qu'il faut trouver la valeur des parties nouvelles de la choſe alliée; le problême n'a aucune difficulté, & il eſt toûjours déterminé; c'eſt-à-dire qu'il n'a qu'une ſolution.

Mais lorſque la valeur des unités ou parties nouvelles du corps compoſé, eſt donnée, & qu'il faut trouver combien on doit prendre de parties de chacune des choſes qu'il faut mêler enſemble; le problême eſt plus difficile, & il n'eſt déterminé que dans le cas où les choſes qui doivent entrer dans le mélange, ne ſont que de deux eſpéces, ou peuvent être réduites à deux eſpéces.

PROBLÉME.

121 *Lorſque l'on connoît la valeur & le nombre des différentes choſes qui entrent dans la compoſition du corps allié, trouver la valeur des unités du corps allié.*

On multipliera la valeur de l'unité de chaque eſpéce de choſe, par le nombre des unités de cette eſpéce; ce qui donnera autant de produits particuliers, qu'on aura de choſes à faire entrer dans le mélange. Enſuite on additionnera tous ces produits; & ayant diviſé leur ſomme, par la ſomme des unités de toutes les choſes qui compoſent le mélange, le quotient ſera la valeur de l'unité du corps allié.

EXEMPLE PREMIER.

On a mêlé enſemble trois ſortes de grains de différent prix; ſavoir,

10 ſacs de blé à 12#,
8 ſacs de blé à 14#,
6 ſacs de ſeigle à 8#:
Et l'on demande combien vaut le ſac du mélange.

Multipliant 12# par 10, on aura pour 10 ſacs de blé à 12# 120#
Multipliant 14# par 8, on aura pour 8 ſacs de blé à 14# 112#
Multipliant 8# par 6, on aura pour 6 ſacs de ſeigle à 8# 48#

Ainſi les 24 ſacs mêlés enſemble vaudront en tout 280#

Diviſant cette ſomme 280# par 24 qui eſt le nombre des ſacs, le quotient 11# 13ß 4d. ſera la valeur d'un ſac du mélange.

EXEMPLE II.

Un marchand a mêlé enſemble 288 *pintes de différens vins ; ſavoir,*

156 *pintes de vin à* $8^{ſ}$ *la pinte,*

132 *pintes de vin à* $6^{ſ}$ *la pinte.*

On demande à quel prix il doit vendre la pinte de ce mélange, pour n'y rien perdre.

Multipliant $8^{ſ}$ par 156, on aura pour 156 pintes de vin à $8^{ſ}$ $1248^{ſ}$

Multipliant $6^{ſ}$ par 132, on aura pour 132 pintes de vin à $6^{ſ}$ $792^{ſ}$

Ainſi les 288 pintes vaudront en tout $2040^{ſ}$

Donc en diviſant ce prix total $2040^{ſ}$ de 288 pintes, par 288; le quotient $7^{ſ}$ $1^{d.}$ ſera le prix auquel le marchand doit vendre la pinte du mélange de ſes vins, pour n'y rien perdre.

EXEMPLE III.

Un orfévre a fondu enſemble 60 *marcs d'argent à différens titres ; ſavoir,*

32 *marcs à* 11 *deniers de fin,*

20 *marcs à* 11 *deniers* 12 *grains de fin,*

8 *marcs à* 10 *deniers* 12 *grains de fin.*

On demande à quel titre eſt le mélange.

On diviſe le marc d'argent en 12 parties égales qu'on nomme *deniers*, & l'on partage le *denier* en 24 *grains*.

Si l'argent eſt pur & ſans mélange d'aucun autre métal, c'eſt-à-dire ſi les 12 parties du marc d'argent ſont fines ; on dit que l'argent eſt à 12 *deniers*. Si le marc eſt compoſé de 11 parties d'argent pur & de

1 partie d'un autre métal ; on dit que l'argent eſt à 11 *deniers*. Si le marc d'argent eſt compoſé de 10 parties & demie d'argent fin & de 1 partie & demie d'un autre métal ; on dit que le titre de l'argent eſt à 10 *deniers & demi*, ou à 10 *deniers* 12 *grains* : & ainſi des autres. Cela poſé, voici comment on réſoudra la queſtion.

Comme on a 32 marcs à 11 deniers, 20 marcs à 11 deniers 12 grains, 8 marcs à 10 deniers 12 grains,

On multipliera 11*D* par 32, & l'on aura 352*D*
On multipliera 11*D* 12*g* par 20, & l'on aura 230
On multipliera 10*D* 12*g* par 8, & l'on aura 84

Les 60 marcs contiendront donc en tout 666*D*

Ainſi en diviſant ces 666 *deniers de fin* par 60, le quotient 11*D* 2*g* $\frac{2}{5}$ ſera la quantité d'argent fin contenue dans un marc du mélange, & ſera par conſéquent le titre de ce mélange.

Juſqu'ici l'on a donné le nombre & la valeur de chaque eſpéce de parties qu'on a propoſé de mêler, & il a ſeulement été queſtion de trouver la valeur d'une partie du mélange. Dans les deux problêmes ſuivans & leurs exemples, on ne ſuppoſera connu, que le nombre total des parties du mélange, avec la valeur de chaque eſpéce de parties & la valeur totale de ce mélange ; & il faudra déterminer le nombre des parties de chaque eſpéce, dont le mélange ſera compoſé.

PROBLÊME.

122 *Deux unités de différentes valeurs étant données, trouver quelles parties il en faudra prendre pour compoſer une unité d'une valeur moyenne donnée.*

On fera deux fractions qui auront pour dénominateur commun la différence de la plus haute valeur à la moindre. L'une de ces fractions aura pour numérateur

la différence de la valeur moyenne à la plus baſſe, & ſera la portion qu'il faudra prendre de l'unité de la plus grande valeur. L'autre fraction aura pour numérateur la différence de la valeur moyenne à la plus haute, & ſera la portion qu'il faudra prendre de l'unité qui vaudra le moins.

On va démontrer cette regle dans le premier exemple qui ſuit.

EXEMPLE PREMIER.

On veut faire un ſac de blé à 12#, *en mêlant enſemble du blé à* 10# *le ſac, & du blé à* 13# *le ſac.*

Imaginons que les trois ſacs, celui de 10# qui eſt le moins cher, celui de 13# qui eſt le plus cher, & celui que l'on veut compoſer pour le donner au prix moyen 12#, ſont partagés en parties égales; il n'importe en combien pour le préſent.

La différence 2# du plus bas prix 10# au prix moyen 12#, étant double de la différence 1# du plus haut prix au même prix moyen; il eſt clair que chaque partie qu'on prendra du blé le moins cher, pour faire le mélange, diminuera le prix moyen d'une quantité double de celle dont chaque partie du blé le plus cher augmentera le prix moyen. Ainſi pour augmenter le prix moyen du ſac par le blé le plus cher, de la même quantité dont il ſera diminué par le blé le moins cher, afin que le prix moyen ſoit tel qu'on le demande; il faudra prendre deux parties du blé le plus cher, contre une partie du blé le moins cher; c'eſt-à-dire que, de trois parties qu'on prendra en tout pour compoſer un ſac au prix moyen, il faudra prendre deux parties du blé le plus cher, & une partie du blé le moins cher. Ainſi le ſac de blé à 12#, ſera compoſé de $\frac{2}{3}$ de ſac à 13#, & de $\frac{1}{3}$ de ſac à 10#.

Pour ramener cette opération à la regle du problême; on remarquera que le dénominateur 3 commun des deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{3}$ qui repréſentent les deux portions de ſac dont on compoſe le mélange, vient de la différence 3^{lt} qu'il y a entre le blé le plus cher & le blé le moins cher; & que les numérateurs 2 & 1 de ces fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{3}$, viennent des différences 2^{lt} & 1^{lt} qu'il y a du prix moyen 12^{lt} aux deux prix 10^{lt} & 13^{lt} des deux ſacs dont les parties compoſent le mélange: en ſorte que les deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{3}$ viennent de celles-ci $\frac{2}{3}^{\text{lt}}$ & $\frac{1}{3}^{\text{lt}}$.

EXEMPLE II.

On veut faire un marc d'argent à 11 *deniers de fin, en mêlant enſemble de l'argent à* 11*D* 18*g*, *& de l'argent à* 10*D* 12*g*; *& l'on demande combien il faut prendre de chacune de ces deux eſpeces d'argent.*

Le titre le plus bas étant de	10*D* 12*g*
Le titre le plus haut étant de	11*D* 18*g*
Le titre moyen étant de	11*D*

La différence du titre le plus bas au plus haut, ſera 1*D* 6*g* ou 30 grains.

La différence du titre moyen au plus bas, ſera de 12 grains.

La différence du titre moyen au plus haut, ſera de 18 grains.

Ainſi (*N°.* 122.) deux fractions qui auront 30*g*, ou ſimplement 30 pour dénominateur commun, & qui auront 12*g* & 18*g*, ou ſimplement 12 & 18 pour numérateurs, ſeront les portions de marc, qu'il faudra prendre des deux argents dont les titres ſont à 11*D* 18*g* & à 10*D* 12*g*; c'eſt-à-dire que,

1°. $\frac{12}{30}$ ou $\frac{2}{5}$ ſera la portion qu'il faudra prendre du marc à 11*D* 18*g*.

2°. $\frac{18}{30}$ ou $\frac{3}{5}$ ſera la portion qu'il faudra prendre du marc à 10*D* 12*g*.

EXEMPLE III.

Faire un pied cube de matiere du poids de 500 ℔, *en mêlant deux matieres dont l'une péſe* 650 ℔ *& l'autre* 480 ℔ *le pied cube.*

Le pied cube le plus peſant étant de	650 ℔
Le pied cube le moins peſant étant de	480 ℔
Le pied cube du poids moyen étant de	500 ℔

La différence du moindre poids au plus grand, ſera 170 ℔.

La différence du poids moyen au moindre, ſera 20 ℔.

La différence du poids moyen au plus grand, ſera 150 ℔.

Ainſi (*N°.* 122.) deux fractions qui auront 170 ℔, ou ſimplement 170 pour commun dénominateur, & qui auront 20 ℔ & 150 ℔, ou ſimplement 20 & 150 pour leurs numérateurs, ſeront les portions qu'il faudra prendre des deux pieds cubes donnés, pour compoſer le pied cube demandé du poids de 500 ℔ ; c'eſt-à-dire que,

1°. $\frac{20}{170}$ ou $\frac{2}{17}$ ſera la partie qu'il faudra prendre du pied cube qui péſe 650 ℔.

2°. $\frac{150}{170}$ ou $\frac{15}{17}$ ſera la partie qu'il faudra prendre du pied cube qui péſe 480 ℔.

On dit qu'Hiéron Prince de Siracuſe, ſoupçonnant qu'il y avoit de l'alliage dans une couronne d'or qu'on lui avoit faite, eut recours à Archimede pour découvrir, ſans endommager la couronne, de combien d'argent elle pouvoit être mêlée ; & qu'Archimede, par une regle ſemblable à celle que nous avons appliquée au dernier exemple, trouva la quantité d'argent qui étoit dans la couronne.

Le problême qu'Archimede avoit à réſoudre, conſiſtoit à faire un volume égal à celui de la couronne, & du même

poids que la couronne, en mêlant enſemble de l'or & de l'argent purs. Mais pour faire cet alliage, il avoit beſoin de connoître le poids d'un volume d'or pur, & celui d'un volume d'argent pur, égal à celui de la couronne; ce qui faiſoit le ſujet d'un autre problême, qu'Archimede eut premierement à réſoudre.

Un corps peſant plongé dans l'eau, y perd une partie de ſon poids égale au poids du volume d'eau qu'il déplace. Ainſi les corps qui perdent dans l'eau des parties égales de leurs poids, déplacent des volumes d'eau égaux, & ont par conſéquent eux-mêmes des volumes égaux.

Suivant ce principe, Archimede après avoir peſé la couronne dans l'air, la peſa dans l'eau pour connoître combien elle y perdoit de ſon poids. On peut préſumer qu'il peſa enſuite dans l'air une quantité d'or pur qu'il augmenta ou diminua, juſqu'à ce qu'en la peſant dans l'eau, elle y perdit une partie de ſon poids égale à celle que la couronne y avoit perdue. Par ce moyen dont nous ſuppoſons qu'Archimede ſe ſervit, il parvint à faire un volume d'or pur, égal à celui de la couronne. En ſuppoſant qu'Archimede trouva de la même maniere un volume d'argent pur égal à celui de la couronne, il fut en état de découvrir l'alliage de la couronne; c'eſt-à-dire de déterminer combien il falloit d'or pur & d'argent pur, pour compoſer un volume égal à celui de la couronne & du même poids que la couronne.

Nous ne nous occuperons point des différentes façons dont Archimede pouvoit découvrir le poids d'un volume d'or ou d'argent égal à celui de la couronne, en peſant ſucceſſivement dans l'air & dans l'eau un lingot quelconque d'or ou d'argent; parce que ces problêmes appartiennent à l'Hydroſtatique où nous aurons occaſion de les expliquer plus particuliérement, & de remarquer l'inſuffiſance de cette méthode, pour déterminer l'alliage des métaux ou des liqueurs.

PROBLÉME.

123 *Faire une ſomme propoſée avec deux ſortes de piéces, de chacune deſquelles la valeur ſera donnée, & dont le nombre total ſera auſſi déterminé.*

1°. On multipliera la valeur d'une des moindres piéces, par le nombre total des piéces, & l'on retranchera ce produit de la ſomme totale qu'on doit compoſer par l'alliage des deux eſpéces de piéces. Puis on diviſera le reſte de cette ſouſtraction, par la différence d'une grande piéce à une petite piéce; & le quotient de cette diviſion ſera le nombre qu'on prendra des plus grande piéces, pour faire l'alliage propoſé.

2°. Si l'on vouloit avoir le nombre des petites piéces qui doivent entrer dans l'alliage propoſé; l'on multiplieroit la valeur d'une des plus grandes piéces, par le nombre total des piéces, & de ce produit l'on retrancheroit la ſomme propoſée. Enſuite on diviſeroit le reſte de cette ſouſtraction, par la différence de la plus grande piéce à la plus petite; & le quotient de cette diviſion ſeroit le nombre des petites piéces qui doivent entrer dans l'alliage propoſé.

On va donner la démonſtration de cette regle dans l'exemple ſuivant.

EXEMPLE PREMIER.

On n'a que des piéces de 2 ſols & de 18 deniers. & l'on veut faire 40 ſols en 24 piéces.

1°. Si toutes les 24 piéces étoient de 18 deniers, elles ne produiroient que 36 ſols, & donneroient par conſéquent 4 ſols de moins que les 40 ſols qu'on demande. Ainſi il faudroit augmenter de 4 ſols ce

produit 36 ſols, ſans augmenter le nombre des 24 piéces. Or il eſt évident que c'eſt cette augmentation de 4 ſols, que la premiere partie de la ſolution du problême fait trouver, en multipliant une petite piéce par le nombre total des piéces, & en retranchant le produit de la ſomme propoſée.

Comme une piéce de 2 ſols ſurpaſſe une piéce de 18 deniers de $\frac{1}{2}$ ſol, chaque piéce de 2 ſols qu'on mettra à la place d'une piéce de 18 deniers, augmentera le produit 36 ſols de $\frac{1}{2}$ ſol, ſans augmenter le nombre des piéces. Ainſi pour augmenter de 4 ſols le produit 36 ſols des 24 piéces de 18 deniers, il faudra prendre à la place de piéces de 18 deniers, autant de piéces de 2 ſols, que $\frac{1}{2}$ ſols eſt contenu de fois dans 4 ſols; c'eſt-à-dire qu'il faudra prendre 8 piéces de 2 ſols. Or c'eſt ce nombre 8 piéces que la même partie de la ſolution du problême fait trouver, en diviſant le reſte de la ſouſtraction par la différence de la plus grande piéce à la plus petite. On n'aura donc plus que 16 piéces de 18 deniers, avec 8 piéces de 2 ſols, qui feront enſemble 24 piéces, & compoſeront la ſomme 40 ſols qu'on demande.

2°. Si toutes les 24 piéces étoient de 2 ſols, elles produiroient 48 ſols, & donneroient par conſéquent 8 ſols de plus que les 40 ſols qu'on demande. Ainſi il faudroit diminuer de 8 ſols ce produit 48 ſols, ſans diminuer le nombre des 24 piéces. Or c'eſt cette diminution de 8 ſols, que la ſeconde partie du problême fait trouver, en multipliant une grande piéce par le nombre total des piéces, & en retranchant du produit, la ſomme qu'on ſe propoſe de faire.

Chaque piéce de 18 deniers qu'on mettra à la place d'une piéce de 2 ſols, diminuera de $\frac{1}{2}$ ſol le produit 48 ſols, ſans augmenter ni diminuer le nombre

total des piéces. Ainſi pour diminuer ce produit de 8 ſols, il faudra prendre autant de piéces de 18 deniers, que ½ ſols différence des deux eſpéces de piéces eſt contenu de fois dans 8 ſols; c'eſt-à-dire que le quotient 16 de la diviſion de 8 ſols, par la différence ½ ſol des deux eſpéces de piéces, ſera le nombre des piéces de 18 deniers qui doivent faire partie de l'alliage demandé. On aura donc 16 piéces de 18 deniers, & 8 piéces de 2 ſols, qui font enſemble 24 piéces, & compoſent les 40 ſols qu'on demande.

Lorſqu'on a trouvé le nombre des piéces de l'une des deux eſpéces, il n'eſt pas néceſſaire de chercher par les préceptes du problême, le nombre des piéces de l'autre eſpéce; puiſque ſi l'on retranche le nombre des piéces qu'on aura trouvé, du nombre total des piéces qui eſt donné; le reſte de la ſouſtraction ſera évidemment le nombre des piéces de l'autre eſpéce.

EXEMPLE II.

30 *Officiers tant Capitaines que Lieutenans, ont payé en tout* 2000# *pour leur rançon: chaque Capitaine a payé* 100#, *& chaque Lieutenant* 60#. *On demande combien il y avoit de Capitaines, & combien il y avoit de Lieutenans.*

Il eſt évident que cette queſtion revient à la précédente; & que dans celle-ci, il s'agit de faire 2000# en 30 piéces dont les unes ſoient de 100# & les autres de 60#.

Ainſi pour avoir le nombre des Capitaines qui payent la plus forte rançon 100#, on multipliera la plus petite rançon 60#, par le nombre 30 des Officiers; & ayant retranché le produit 1800#, de la totalité 2000# des rançons, il reſtera 200# qu'on

diviſera, par la différence 40# de la plus forte rançon à la plus foible; & le quotient 5 ſera le nombre des Capitaines qui ont payé la plus forte rançon.

Comme il n'y a que 30 Officiers, tant Capitaines que Lieutenans, & qu'on a trouvé 5 Capitaines; il eſt clair qu'il n'y aura que 25 Lieutenans.

EXEMPLE III.

On a loué un ouvrier pour 30 jours, à condition de lui donner 40 ſols pour chaque jour qu'il travaillera, & de lui retenir ſur ce qu'il aura gagné, 6 ſols pour chaque jour qu'il ne travaillera pas. Au bout des 30 jours, l'ouvrier a reçu 37#. On demande combien de jours cet ouvrier n'a pas travaillé.

Il s'agit dans cet exemple de faire 37# effectives, avec 30 choſes de deux eſpéces oppoſées, ſavoir avec des gains de 40 ſols chacun, & avec des pertes de 6 ſols chacune. Ainſi la queſtion ſe réduit à une Regle d'Alliage qu'on fera ſuivant le dernier problême.

1°. On multipliera 40 ſols par 30 nombre des jours, & du produit 1200ſ ou 60#, on retranchera la ſomme 37#; ce qui donnera un reſte de 23#, ou de 460ſ.

2°. La différence d'un gain de 40ſ à une perte de 6ſ, eſt 46ſ. Ainſi l'on diviſera le reſte 460ſ qu'on a trouvé par 46; & le quotient 10 ſera le nombre des jours que l'ouvrier n'a point travaillé.

Car ſi l'ouvrier n'avoit manqué aucun jour à travailler, il auroit gagné 60# en 30 jours, au lieu de 37# ſeulement qu'il a reçues: ainſi les 23# qu'il a manqué de gagner, ſont pour les jours qu'il a manqué de travailler. Mais par les conditions du marché, l'ouvrier perd 46ſ chaque jour qu'il ne travaille

point, ſavoir 40ß qu'il manque de gagner, & 6ß qu'on lui retient ſur ce qu'il a précédemment gagné. Donc en diviſant les 23# de perte totale, par la perte 46ß d'un jour; le quotient 10 qu'on trouve, eſt le nombre des jours de perte.

On rapporte aux deux derniers problêmes tous les alliages de plus de deux choſes différentes, lorſque par les conditions des queſtions, les différentes choſes qu'on veut allier peuvent ſe réduire à deux eſpéces ſeulement. On va donner des exemples de ces alliages.

Exemple IV.

On veut faire 30 *livres de poudre à* 20ß *la livre, en mêlant enſemble de la poudre à* 28ß, *de la poudre à* 18ß *& de la poudre à* 8ß; *à condition que la poudre à* 18ß *& celle à* 8ß *ſeront en parties égales.*

Puiſque la poudre à 18ß & la poudre à 8ß la livre, doivent être en parties égales dans le mélange, & que 1 livre de poudre à 18ß avec 1 livre de poudre à 8ß, feront 2 livres de poudre valant enſemble 26ß, & compoſeront par conſéquent de la poudre à 13ß la livre; il eſt évident que la queſtion ſe réduira premiérement à faire 30 livres de poudre à 20ß, ou la ſomme de 600ß, avec de la poudre à 28ß & de la poudre à 13ß la livre, ou bien avec 30 piéces dont les unes ſeront de 28ß & les autres de 13ß. Or cette queſtion ſe rapportera au dernier problême.

En réſolvant la queſtion, l'on trouvera qu'il faut 14 livres de poudre à 28ß, & 16 livres de poudre à 13ß: & comme la poudre à 18ß & la poudre à 8ß, ſont en parties égales dans la poudre à 13ß; il eſt évident que l'alliage demandé ſera compoſé de 14 livres de poudre à 28ß, de 8 livres de poudre à 18ß, & de 8 livres de poudre à 8ß.

Si pour faire les 30 ℔ de poudre à 20ß la livre, avec de la poudre à 28ß, de la poudre à 18ß, & de la poudre à 8ß la livre; on impoſe la condition de prendre deux fois autant de poudre à 18ß que de poudre à 8ß: comme 2 livres de poudre à 18ß & 1 livre de poudre à 8ß, font 3 livres de poudre valant enſemble 44ß; la livre de ce premier mélange vaudra 14ß 8ª. Ainſi la queſtion ſe réduira à faire 30 ℔ de poudre à 20ß la livre, avec de la poudre à 28ß & de la poudre à 14ß 8ª la livre; & l'on trouvera qu'il faut prendre 12 ℔ de poudre à 28ß, avec 18 ℔ de poudre à 14ß 8ª la livre: & comme les 18 ℔ de poudre à 14ß 8ª ſont compoſées de deux parties de poudre à 18ß, & d'une partie de poudre à 8ß; l'alliage demandé ſera compoſé de 12 ℔ de poudre à 18ß, de 6 ℔ de poudre à 8ß, mêlées avec 12 ℔ de poudre à 28ß la livre.

Comme on pourra toûjours faire de la poudre à 20ß *la livre, avec de la poudre à* 28ß, *de la poudre à* 18ß *& de la poudre à* 8ß *la livre, quel que ſoit le rapport qu'on voudra mettre entre la quantité de poudre à* 18ß *& la quantité de poudre à* 8ß, *& qu'on pourra varier ce rapport à l'infini; il eſt évident qu'il y a une infinité de combinaiſons différentes par leſquelles on pourra faire de la poudre à* 20ß *la livre, avec de la poudre à* 28ß, *de la poudre à* 18ß *& de la poudre à* 8ß *la livre. Ainſi le problême où l'on propoſeroit ſeulement de faire de la poudre à* 20ß, *avec de la poudre à* 28ß, *de la poudre à* 18ß *& de la poudre à* 8ß *la livre, auroit une infinité de ſolutions, & ſeroit ce qu'on appelle un* Problême indéterminé.

Il en ſera de même de tous les autres problêmes, lorſqu'il ſera queſtion de compoſer un nombre donné de choſes d'une valeur donnée, en alliant trois eſpéces de choſes de différentes valeurs données, & qu'il n'y aura point de condition

qui détermine en quel rapport ſeront les quantités de deux des trois choſes données.

Quoique ces problêmes d'alliage de trois choſes, (lorſque rien ne détermine à réduire à deux eſpéces les choſes qu'on doit allier) ſoient par eux-mêmes ſuſceptibles d'une infinité de ſolutions, c'eſt-à-dire de combinaiſons des choſes alliées; il y a néanmoins des conditions qui réduiſent toutes les ſolutions poſſibles à un certain nombre de combinaiſons; comme nous le verrons dans un problême particulier qui ſuivra l'exemple cinquiéme qu'on va donner.

Exemple V.

On propoſe de faire 40 ℔ de poudre à 20 ſols la livre, en mêlant enſemble de la poudre à 12 ß, de la poudre à 16 ß, de la poudre à 18 ß & de la poudre à 28 ß la livre; en obſervant d'employer trois fois autant de poudre à 12 ß que de celle à 16 ß, & de mettre deux fois autant de poudre à 28 ß que de poudre à 18 ß.

1°. Pour remplir une premiere condition de la queſtion, il faudra prendre 3 ℔ de poudre à 12 ß contre 1 ℔ à 16 ß, qui feront 4 livres de poudre valant enſemble 52 ß, & compoſeront par conſéquent de la poudre à 13 ß la livre.

2°. Par une autre condition de la queſtion, il faut prendre 2 ℔ de poudre à 28 ß contre 1 ℔ de poudre à 18 ß, qui feront 3 ℔ de poudre valant enſemble 74 ß, & compoſeront par conſéquent de la poudre à 24 ß 8 ♎ la livre.

Les quatre eſpéces de poudre qu'il faudra allier, ſe réduiront donc à deux eſpéces; & il s'agira de faire 40 ℔ de poudre à 20 ß, avec de la poudre à 13 ß, & de la poudre à 24 ß 8 ♎ la livre.

En réſolvant la queſtion, l'on trouvera qu'il faut

16lb de poudre à 13ß, & 24lb de poudre à 24ß 8d la livre.

1°. Comme les 16lb de poudre à 13ß contiendront trois parties de poudre à 12ß, contre une partie de poudre à 16ß; il eſt clair qu'il faudra prendre 12lb de poudre à 12ß & 4lb de poudre à 16ß, pour faire l'alliage demandé.

2°. Et comme les 24lb de poudre à 24ß 8d contiendront deux parties de poudre à 28ß, contre une partie de poudre à 18ß; il faudra néceſſairement prendre 16lb de poudre à 28ß & 8lb de poudre à 18ß.

Il eſt viſible que ſi l'on avoit fixé un autre rapport entre les quantités de poudre à 12ß *&* 16ß, *ou entre les quantités de poudre à* 28ß *&* 18ß; *l'on auroit trouvé une autre combinaiſon pour le mélange demandé, & qu'on auroit toûjours fait* 40lb *de poudre à* 20ß *la livre, avec les quatre eſpéces données: & comme ces rapports peuvent être variés à l'infini; il s'enſuit que les problêmes d'alliage de* 4 *choſes, peuvent avoir une infinité de combinaiſons, lorſque les quatre choſes données ne peuvent pas être réduites à deux. Nous verrons cependant dans le problême ſuivant & ſes exemples, que certaines circonſtances telles que celles où il faut prendre des nombres entiers, réduiſent toutes les ſolutions poſſibles à quelques combinaiſons ſeulement.*

PROBLÉME.

124 *Faire une ſomme propoſée avec trois ſortes de piéces dont le nombre total ſoit donné avec la valeur de chacune en particulier.*

On multipliera la valeur de la plus petite piéce, par le nombre des piéces qu'on doit employer dans l'alliage, & l'on retranchera ce produit de la ſomme totale

totale qu'on ſe propoſera de faire; ce qui donnera un reſte dont il faudra augmenter le produit, pour faire la ſomme demandée.

On partagera ce reſte en deux parties dont l'une ſoit diviſible par l'excès de la plus grande piece ſur la plus petite, & dont l'autre ſoit diviſible par l'excès de la moyenne piece ſur la plus petite.

Si l'on ne peut faire ce partage que d'une maniere, le Problême n'aura qu'une ſolution; mais ſi l'on peut faire ce partage en pluſieurs manieres, & que les deux parties étant diviſées, l'une par l'excès de la plus grande piece ſur la plus petite, l'autre par l'excès de la moyenne piece ſur la plus petite, donnent des quotiens dont la ſomme ne ſoit pas plus grande que le nombre des pieces qu'on doit employer; le problême aura autant de ſolutions, qu'il y aura de manieres de partager le reſte en deux parties de cette eſpéce.

Le reſte étant ainſi partagé en deux parties de toutes les façons poſſibles; on diviſera les premieres parties par l'excès de la plus grande piece ſur la plus petite; & les quotiens de ces diviſions ſeront les différens nombres qu'on pourra prendre des piéces de la plus grande valeur, pour faire l'alliage demandé.

On diviſera de la même maniere les ſecondes parties du reſte, par l'excès de la moyenne piéce ſur la plus petite; & les quotiens de ces diviſions ſeront les différens nombres qu'on pourra prendre des piéces de la moyenne valeur, pour faire l'alliage propoſé.

Les deux parties correſpondantes du reſte, diviſées, comme on vient de le dire, ayant donné le nombre des piéces de la plus grande valeur & le nombre des piéces de la moyenne valeur; la ſomme de ces deux nombres de piéces ſera retranchée du nombre

total des piéces qui eſt donné ; & le reſte ſera le nombre des piéces de la moindre valeur. Or il eſt évident qu'on aura autant de différens nombres de ces moindres piéces, qu'on aura trouvé de nombres différens pour les autres piéces.

On va donner la démonſtration de ce procédé dans le premier exemple qui ſuit.

EXEMPLE PREMIER.

On propoſe de faire 18^{liv} *ou* 360^{ſ}, *en* 22 *piéces de trois eſpéces, ſavoir de* 24^{ſ}, *de* 12^{ſ} *& de* 6^{ſ}.

Si les 22 piéces étoient toutes de 6^{ſ}, elles ne produiroient que 132^{ſ}, & feroient 228^{ſ} de moins que la ſomme 360^{ſ} qu'on demande. Ainſi le produit 132^{ſ} qu'on aura, en multipliant par 22 la valeur de la plus petite piéce qui eſt de 6^{ſ}, doit être augmenté de 228^{ſ}, ſans que le nombre des 22 piéces ſoit changé. Or cette augmentation de 228^{ſ}, qu'on trouvera en retranchant le produit 132^{ſ} de la ſomme propoſée 360^{ſ}, ne peut être faite que par l'échange de quelques piéces de 24^{ſ} & de 12^{ſ}, contre un pareil nombre de piéces de 6^{ſ}.

1°. Chaque piéce de 24^{ſ} qu'on mettra à la place d'une piéce de 6^{ſ}, donnera un augmentation de 18^{ſ}, égale à la différence de la plus grande piéce à la plus petite. Ainſi la partie d'augmentation qu'on produira, en changeant quelques piéces de 6^{ſ}, contre un pareil nombre de piéces de 24^{ſ}, ſera un nombre de ſols multiple de 18^{ſ}; & par conſéquent diviſible par 18^{ſ} différence de la plus grande piéce à la plus petite.

2°. Chaque piéce de 12^{ſ} qu'on mettra pour une piéce de 6^{ſ}, produira une augmentation de 6^{ſ} qui

eſt la différence d'une moyenne piéce à la plus petite. Ainſi la partie d'augmentation qu'on produira, en ſubſtituant des piéces de 12ß à des piéces de 6ß, ſera un nombre de ſols multiple de 6ß; & par conſéquent diviſible par 6ß différence de la moyenne piéce à la plus petite.

Il faudra donc partager l'augmentation 228ß en deux parties dont l'une ſoit diviſible par la différence 18ß de la plus grande piéce à la plus petite, & dont l'autre ſoit diviſible par la differense 6ß de la moyenne piéce à la plus petite.

Premieres parties de 228ß qui ſont diviſibles par 18ß, & qui peuvent être produites en ſubſtituant des piéces de 24ß à des piéces de 6ß.	Secondes parties correſpondantes de 228ß qui ſont diviſibles par 6ß, & qui peuvent être produites en changeant des piéces de 12ß, contre un pareil nombre de piéces de 6ß.
18ß	210ß
36	192
54	174
72	156
90	138
108	120
126	102
144	84
162	66
180	48
198	30
216	12

Chaque piéce de 24ß ſubſtituée à une piéce de 6ß, ne produiſant que 18ß dans les premieres parties de 228ß, & chaque piéce de 12ß miſe à la place d'une piéce de 6ß, ne produiſant que 6ß dans les ſecondes parties de 228ß; il eſt clair que ſi l'on diviſe les premieres parties par 18ß, on aura les différens nombres de piéces de 24ß qui produiſent les premieres parties, ou qui peuvent entrer dans l'alliage; & qu'en diviſant les ſecondes parties par 6ß, on aura les différens nombres de piéces de 12ß qui peuvent

entrer en même temps dans l'alliage. Ces diviſions étant faites, on aura les nombres ſuivans de piéces de $24^{ß}$ & de piéces de $12^{ß}$.

Différens nombres de piéces de $24^{ß}$ qui peuvent entrer dans l'alliage.	Nombres correſpondans de piéces de $12^{ß}$ qui peuvent entrer dans l'alliage.
1	35
2	32
3	29
4	26
5	23
6	20
7	17
8	14
9	11
10	8
11	5
12	2

Comme il ne faut que 22 piéces en tout dans l'alliage qu'on demande; il eſt évident que les ſept premiers nombres de piéces de $24^{ß}$, qui, avec les nombres correſpondans de piéces de $12^{ß}$, font plus de 22 piéces, doivent être rejettés avec leurs correſpondans; & que le huitiéme nombre 8 des piéces de $24^{ß}$, qui, avec le nombre correſpondant 14 de piéces de $12^{ß}$, fait juſtement 22 piéces, doit pareillement être rejetté de l'alliage propoſé avec ſon correſpondant 14; ſi l'on veut que cet alliage contienne des piéces de $6^{ß}$, comme on le demande dans la queſtion qui fait le ſujet de l'exemple.

Ces huit premiers nombres de piéces de $24^{ß}$, & les huit nombres correſpondans de piéces de $12^{ß}$ étant ſupprimés; il ne reſtera plus que quatre nombres différens de piéces de $24^{ß}$, avec quatre nombres correſpondans de piéces de $12^{ß}$: & comme il ne faut que 22 piéces en tout; ſi de 22 l'on retran-

che chaque ſomme faite d'un nombre de piéces de 24ß & du nombre correſpondant de piéces de 12ß; chaque reſte ſera le nombre correſpondant de piéces de 6ß.

Il y aura donc quatre combinaiſons différentes de piéces de 24ß, de 12ß & de 6ß, pour faire 18℔ ou 360ß, en 22 piéces de ces trois eſpéces. Voici ces quatre combinaiſons.

Nombres de piéces de 24ß.	Nombres correſpondans de piéces de 12ß.	Nombres correſpondans de piéces de 6ß.
9	11	2
10	8	4
11	5	6
12	2	8

Les ſept premiers nombres de piéces de 24ß, & les ſept nombres correſpondans de piéces de 12ß qu'on a rejettés, auroient pû réſoudre cette queſtion.

Une perſonne s'étant intéreſſée à trois différens jeux, a gagné des piéces de 24ß au premier, des piéces de 12ß au ſecond, & a perdu des piéces de 6ß au troiſiéme; & ayant gagné 22 piéces de plus de celles de 24ß & de celles de 12ß, qu'elle n'a perdu de celles de 6ß; ſon gain a été de 18℔ ou de 360ß. On demande combien cette perſonne peut avoir gagné de piéces de 24ß, & de piéces de 12ß, & combien elle peut avoir perdu de piéces de 6ß.

Cette queſtion aura ſept ſolutions, ſi l'on ſuppoſe que la perſonne a réellement perdu au jeu de 6ß; & il y aura une huitiéme ſolution, ſi l'on ſuppoſe qu'elle n'a rien perdu au jeu de 6ß. Les huit premiers nombres de piéces de 24ß, & les huit nombres correſpondans de piéces de 12ß, qu'on a rejettés dans la queſtion de l'exemple, ſeront les nombres de piéces de 24ß & de 12ß gagnées. Et comme on ſuppoſe que le joueur a gagné 22 piéces de plus qu'il n'en a perdu de

celles de 6ß; *ſi l'on retranche* 22, *de chaque ſomme faite d'un nombre de piéces de* 24ß *& d'un nombre correſpondant de piéces de* 12ß; *chaque reſte ſera le nombre correſpondant des piéces de* 6ß *qu'on ſuppoſe avoir été perdues. Voici les huit combinaiſons qui ſervent de réponſe, à la queſtion.*

Nombres des piéces de 24ß qui peuvent avoir été gagnées.	Nombres correſpondans des piéces de 12ß qui peuvent avoir été gagnées.	Nombres correſpondans des piéces de 6ß qui peuvent avoir été perdues.
1	35	14
2	32	12
3	29	10
4	26	8
5	23	6
6	20	4
7	17	2
8	14	0

Exemple II.

On propoſe de faire 30lb *de poudre à* 20ß *la livre, en mêlant enſemble des nombres entiers de livres de poudre à* 28ß, *à* 18ß *& à* 8ß *la livre; & l'on demande combien il faut employer de livres de poudre de chaque eſpéce.*

Les 30lb de poudre à 20ß vaudront 600ß; & les livres de poudre à 28ß, à 18ß & à 8ß, que l'on prendra, pouvant être regardées comme des piéces de 28ß, de 18ß & de 8ß; la queſtion ſe réduit à faire une ſomme de 600ß, en 30 piéces de trois eſpéces, dont les plus grandes ſeront de 28ß, les moyennes de 18ß & les plus petites de 8ß. On pourra donc la réſoudre comme la précédente.

On multipliera 8ß valeur de la plus petite piéce par 30; ce qui produira 240ß qu'on retranchera de la ſomme donnée 600ß; & il reſtera 360ß dont le produit 240ß doit être augmenté par la ſubſtitution de quelques piéces de 28ß & de 18ß, à un pareil nombre de piéces de 8ß.

La différence de la plus grande piéce qui vaut 28ß, à la plus petite qui vaut 8ß, ſera 20ß.

La différence de la moyenne piéce qui vaut 18ß, à la plus petite qui vaut 8ß, ſera 10ß.

On partagera donc 360ß en deux parties qui ſoient diviſibles l'une par 20ß & l'autre par 10ß; & l'on rejettera les ſix premieres parties diviſibles par 20ß avec leurs correſpondantes qui ſe trouveront diviſibles par 10ß; parce qu'elles produiroient un nombre total de piéces plus grand que 30.

Premieres parties de 360ß diviſibles par 20ß, leſquelles peuvent être produites en ſubſtituant des piéces de 28ß à des piéces de 8ß.	140ß 160 180 200 220 240 260 280 300 320 340	Secondes parties correſpondantes de 360ß diviſibles par 10ß, leſquelles peuvent être produites en ſubſtituant des piéces de 18ß à des piéces de 8ß.	220ß 200 180 160 140 120 100 80 60 40 20

Diviſant les premieres parties par 20, & les ſecondes parties correſpondantes par 10; les quotiens correſpondans ſeront les nombres de piéces de 28ß & de 18ß; c'eſt-à-dire les nombres de livres de poudre à 28ß & à 18ß, qui doivent entrer dans l'alliage demandé. Et comme par les conditions du problême, il ne faut que 30 piéces ou 30 livres de poudre; ſi de 30 on retranche chaque ſomme faite d'un nombre de livres de poudre à 28ß, & du nombre correſpondant de livres de poudre à 18ß; chaque reſte ſera le nombre correſpondant des troiſiémes piéces, ou des livres de poudre à 8ß.

En faiſant ces opérations, l'on trouvera les 11 combinaiſons ſuivantes, pour faire 30lb de poudre à 20ß, en mêlant enſemble des livres entieres de poudre à 28ß, à 18ß & à 8ß.

Nombres de livres de poudre à 28ß, ou de piéces de 28ß.	Nombres correſpondans de livres de poudre à 18ß, ou de piéces de 18ß.	Nombres correſpondans de livres de poudre à 8ß, ou de piéces de 8ß.
7	22	1
8	20	2
9	18	3
10	16	4
11	14	5
12	12	6
13	10	7
14	8	8
15	6	9
16	4	10
17	2	11

Cette queſtion n'a que onze ſolutions, parce qu'on a impoſé la condition de prendre des livres entieres de poudre des trois eſpéces.

Si par les conditions de la queſtion, l'on avoit permis de prendre des demi-livres de poudre des trois eſpéces, la queſtion ſe ſeroit réduite à faire 60 demi-livres de poudre à 10ß la demi-livre, avec de la poudre à 14ß, à 9ß & à 4ß la demi-livre. Alors le problême auroit eu 23 combinaiſons, ou le double des combinaiſons précédentes & une de plus.

Et ſi l'on eut permis de prendre la poudre par quarterons, le problême auroit eu 47 combinaiſons; c'eſt-à-dire le double de celles qu'il auroit eues en prenant la poudre à la demi-livre, & encore une de plus.

Si l'on permettoit de peſer la poudre 2 onces à 2 onces, le problême auroit 95 combinaiſons ou ſolutions différentes; & ſi l'on prenoit la poudre par onces, il en auroit 191 &c.

Ainſi l'on pourra multiplier à l'infini le nombre des combinaiſons ou ſolutions, en prenant la poudre par parties

continuellement plus petites, & le problême aura réellement une infinité de combinaiſons, lorſque les parties qu'on pourra prendre de chaque eſpéce de poudre, ſeront arbitraires.

PROBLÉME.

125 *Faire une ſomme propoſée, en quatre ſortes de piéces dont le nombre total ſoit donné avec la valeur de chacune en particulier.*

On multipliera la valeur de la plus petite piéce, par le nombre total des piéces, & le produit ſera retranché de la ſomme qu'on doit faire par l'alliage de toutes les piéces ; ce qui donnera un reſte.

On partagera ce reſte en 3 parties qui ſoient diviſibles par les 3 différences qu'il y aura entre la plus petite piéce & les trois autres. Si ce partage ne peut être fait que d'une maniere, le problême n'aura qu'une ſolution ; mais ſi on peut le faire de pluſieurs façons, & que les trois parties étant diviſées par les trois différences, la ſomme des trois quotiens ſoit moindre que le nombre total des piéces ; le problême aura autant de ſolutions, qu'il y aura de manieres de partager la différence trouvée, en trois parties de cette eſpéce.

Enfin les quotiens des trois diviſions ſeront les trois nombres des trois eſpéces de piéces ſupérieures à la plus petite, qui entreront dans l'alliage.

EXEMPLE.

On veut faire $10^{\text{ß}}$ *ou* 120^{d}, *en 9 piéces de quatre eſpéces, les premieres de* $2^{\text{ß}}$ *ou* 24^{d}, *les ſecondes de* 18^{d}, *les troiſiémes de* $1^{\text{ß}}$ *ou* 12^{d}, *les quatriémes de* 6^{d} ; *& l'on demande combien il faudra prendre de piéces de chacune de ces quatre eſpéces, & toutes les manieres dont le problême peut être réſolu, en prenant toûjours des piéces entieres.*

On multipliera 6^{d} valeur de la plus petite piéce, par 9 nombre total des piéces ; & le produit 54^{d}, étant retranché de la ſomme 120^{d} qu'on doit faire, il reſtera 66 deniers.

Les trois différences de la plus petite piéce qui eſt de 6^{d}, aux trois autres qui ſont de 24^{d}, de 18^{d}, de 12^{d}, étant 18^{d}, 12^{d}, 6^{d}; on partagera le reſte 66^{d} en trois parties diviſibles par 18^{d}, 12^{d} & 6^{d}. Pour faire commodément ce partage, voici l'ordre qu'on ſuivra.

On prendra d'abord les parties de 66^{d} qui ſont diviſibles par 18^{d}. Ces parties ſeront 18^{d}, 36^{d}, 54^{d}.

1°. La partie 18^{d} qu'on prendra dans 66^{d}, laiſſera 48^{d}, pour les deux autres parties qui doivent être diviſibles par 12^{d} & par 6^{d}. Ainſi ces deux dernieres parties ſeront 12^{d} & 36^{d}, ou 24^{d} & 24^{d}, ou 36^{d} & 12^{d} ; d'où l'on tirera trois combinaiſons différentes des trois parties de 66^{d} qui ſont diviſibles par 18^{d}, 12^{d} & 6^{d} : ſavoir,

Premiere combinaiſon	18^{d},	12^{d},	36^{d}.
Seconde combinaiſon	18^{d},	24^{d},	24^{d}.
Troiſiéme combinaiſon	18^{d},	36^{d},	12^{d}.

Diviſant reſpectivement les 3 termes de chaque combinaiſon par 18^{d}, 12^{d} & 6^{d}, on aura trois combinaiſons de piéces de 24^{d}, de 18^{d} & de 12^{d}, qui doivent entrer dans l'alliage demandé ; ſavoir,

1 piéce de 24^{d}, 1 piéce de 18^{d}, & 6 piéces de 12^{d}.
1 piéce de 24^{d}, 2 piéces de 18^{d}, & 4 piéces de 12^{d}.
1 piéce de 24^{d}, 3 piéces de 18^{d}, & 2 piéces de 12^{d}.

2°. Si l'on prend 36 deniers pour la partie du reſte 66^{d} qui eſt diviſible par 18^{d} ; il reſtera 30 deniers pour les deux autres parties qui doivent être diviſibles par 12^{d} & par 6^{d}. Ainſi ces deux dernieres parties

ſeront 12ᵈ & 18ᵈ, ou 24ᵈ & 6ᵈ ; d'où l'on tirera encore deux combinaiſons différentes des trois parties de 66ᵈ qui ſont diviſibles par 18ᵈ, 12ᵈ & 6ᵈ ; ſavoir,

Quatriéme combinaiſon	36ᵈ,	12ᵈ,	18ᵈ.
Cinquiéme combinaiſon	36ᵈ,	24ᵈ,	6ᵈ.

Diviſant les trois termes de ces deux combinaiſons, par les trois différences 18ᵈ, 12ᵈ, 6ᵈ, on aura encore deux combinaiſons de piéces de 24ᵈ, de 18ᵈ & de 12ᵈ, qui peuvent entrer dans l'alliage demandé ; ſavoir,

2 piéces de 24ᵈ ; 1 piéce de 18ᵈ ; 3 piéces de 12ᵈ.
2 piéces de 24ᵈ ; 2 piéces de 18ᵈ ; 1 piéce de 12ᵈ.

3°. Si l'on prend 54ᵈ pour la partie de 66ᵈ qui peut être diviſée par 18ᵈ ; cette partie ne laiſſera que 10ᵈ pour les deux autres parties diviſibles par 12ᵈ & par 6ᵈ : & comme 10ᵈ ne peuvent pas fournir à ces deux parties ; il eſt clair que la partie 54ᵈ doit être rejettée, & ne peut pas donner de nouvelles combinaiſons des piéces qu'on puiſſe allier.

Comme on a épuiſé toutes les parties de 66ᵈ qui peuvent être diviſées par 18ᵈ, & qu'on en a tiré toutes les combinaiſons poſſibles des piéces de 24ᵈ, de 18ᵈ, & de 12ᵈ, dont l'alliage demandé peut être compoſé ; il eſt évident que la ſolution de la queſtion ſe réduit aux cinq combinaiſons qu'on a trouvées ; ſavoir,

1 piéce de 24ᵈ ; 1 piéce de 18ᵈ ; 6 piéces de 12ᵈ.
1 piéce de 24ᵈ ; 2 piéces de 18ᵈ ; 4 piéces de 12ᵈ.
1 piéce de 24ᵈ ; 3 piéces de 18ᵈ ; 2 piéces de 12ᵈ.
2 piéces de 24ᵈ ; 1 piéce de 18ᵈ ; 3 piéces de 12ᵈ.
2 piéces de 24ᵈ ; 2 piéces de 18ᵈ ; 1 piéce de 12ᵈ.

Enfin, puiſque l'alliage ne doit contenir que 9 piéces en tout ; ſi de 9 l'on retranche le nombre total des

piéces de chacune des cinq combinaiſons qu'on vient d'expoſer ; les cinq reſtes ſeront les cinq nombres de piéces de 6^{d}, qui doivent entrer dans ces cinq combinaiſons, pour faire l'alliage demandé.

On fera donc 10^{ſ} ou 120^{d} avec 9 piéces de quatre eſpéces, dont les premieres ſeront de 24^{d}, les ſecondes de 18^{d}, les troiſiémes de 12^{d}, & les dernieres de 6^{d}, en cinq manieres différentes ; & l'on ne pourra le faire d'aucune autre façon, en prenant des piéces entieres. Voici ces cinq combinaiſons.

piéces de 24^{d}.	piéces de 18^{d}.	piéces de 12^{d}.	piéces de 6^{d}.
1	1	6	1
1	2	4	2
1	3	2	3
2	1	3	3
2	2	1	4

126 *Si l'on avoit un plus grand nombre de piéces à allier, on ſuivroit la même méthode ; c'eſt-à-dire qu'on commenceroit par multiplier la valeur de la plus petite piéce par le nombre total des piéces ; & le produit étant retranché de la ſomme totale qu'on doit compoſer par l'alliage de toutes les piéces ; on auroit un reſte qu'on partageroit en autant de parties moins une, qu'on auroit d'eſpéces de piéces à allier, avec cette condition que les parties du reſte fuſſent diviſibles & diviſées par les différences de la plus petite piéce à toutes les autres. Les diviſions des parties du reſte étant faites par les différences, les quotiens ſeroient les nombres des piéces ſupérieures aux plus petites.*

Comme on a déja trop inſiſté ſur ce problême qui n'eſt pas d'une grande utilité ; on ſe diſpenſera d'en donner de nouveaux exemples dont la longueur ſeroit plus capable d'ennuyer que d'amuſer : on n'auroit pas même parlé de ces ſortes de regles d'alliage, ſi tous les livres d'Arithmétique n'en étoient remplis.

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

LIVRE VII.

De la Compoſition des Quarrés & des Cubes; & de l'Extraction de leurs Racines.

CHAPITRE PREMIER.

De la Compoſition des Quarrés, & de l'Extraction des Racines quarrées.

DÉFINITIONS.

127 LORSQU'ON multiplie un nombre par lui-même, le produit qui réſulte de cette multiplication, ſe nomme *Quarré* du nombre qu'on a multiplié par lui-même; & le nombre multiplié, s'appelle *Racine quarrée* de ce Quarré.

Par exemple, ſi l'on multiplie 5 par 5, le produit 25 ſera nommé le *Quarré* de 5; & le nombre 5 s'appellera la *Racine quarrée* de 25.

Si l'on multiplie 1 par 1, le produit qui ſera auſſi 1, ſera le quarré de 1, & 1 ſera la racine quarrée de ce quarré 1.

Il faut bien remarquer cette propriété de l'unité dont le quarré eſt égal à ſa racine. Nous verrons dans le Chapitre ſuivant que le cube de l'unité eſt auſſi l'unité.

L'extraction de la racine quarrée, eſt une opération par laquelle on trouve un nombre qui multiplié par lui-même, produit un nombre égal à celui qui eſt propoſé pour en extraire la racine quarrée.

Lorſque le nombre propoſé vient réellement de la multiplication d'un nombre par lui-même, il eſt toûjours poſſible d'en extraire la racine quarrée. Mais il arrive ſouvent que des nombres dont on propoſe d'extraire la racine quarrée, ne ſont pas le juſte produit de la multiplication d'un nombre par lui-même. Dans ce cas, on ne peut extraire la racine quarrée que du plus grand nombre quarré contenu dans le nombre propoſé.

128 Lorſque le nombre propoſé pour en extraire la racine quarrée, ſera exprimé par un ou deux chiffres ſeulement, ſa racine quarrée n'aura qu'un ſeul chiffre. Car le plus petit nombre repréſenté par trois chiffres, eſt 100; & la racine quarrée de 100 eſt 10 qui eſt exprimé par deux chiffres. Ainſi un nombre qui n'eſt exprimé que par un ou deux chiffres, ou qui eſt par conſéquent moindre que 100, doit avoir un nombre moindre que 10 pour ſa racine quarrée, ou pour celle du plus grand quarré qu'il contient. Or un nombre moindre que 10 s'exprime par un ſeul chiffre.

129 Si le nombre propoſé pour en extraire la racine quarrée avoit plus de deux chiffres, ſa racine auroit

plus d'un chiffre; puiſque le moindre des nombres qui ont plus de deux chiffres, eſt 100, & que la racine quarrée de 100 eſt 10 qui a plus d'un chiffre.

Les regles pour extraire la racine quarrée d'un nombre exprimé par plus de deux chiffres, ſuppoſent qu'on ſçait tirer celle d'un nombre qui n'a qu'un ou deux chiffres : & comme une méthode pour tirer la racine quarrée d'un nombre exprimé par un ou deux chiffres ſeroit ſuperflue; on ſe contente de donner une table qui renferme les neuf nombres quarrés qui n'ont qu'un ou deux chiffres, avec les racines de ces nombres, au-deſſus. On y joint le quarré 100 qui eſt le plus petit des quarrés exprimés par plus de deux chiffres, avec ſa racine 10 au-deſſus.

Racines quarrées	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Quarrés	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.

130 Lorſqu'on ne connoîtra pas la racine quarrée d'un nombre exprimé par un ou deux chiffres, on cherchera ce nombre dans la bande des quarrés de cette table. Si on l'y trouve, le nombre qu'on verra au deſſus, dans la bande des racines, ſera exactement la racine quarrée de ce nombre; mais ſi le nombre propoſé ne ſe trouve pas dans la bande des quarrés, on prendra le quarré plus petit qui en approchera le plus; & le nombre qu'on trouvera au-deſſus de ce quarré, ſera la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans le nombre propoſé.

Par exemple ſi l'on demande la racine quarrée du nombre 72, qu'on ne trouve point dans la bande des quarrés; on prendra dans cette bande le quarré 64 qui eſt plus petit que le nombre propoſé 72, &

qui en approche le plus; & l'on trouvera au-deſſus de ce quarré le nombre 8 qui ſera la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans le nombre propoſé 72.

Lorſqu'on dit qu'un nombre eſt le plus grand quarré contenu dans un nombre propoſé, l'on entend que c'eſt le plus grand quarré exprimé par un nombre entier; & l'on ne prétend pas parler du plus grand quarré qui peut avoir une fraction à ſa racine quarrée.

La petite table qu'on vient de donner, étant ſuffiſante pour l'extraction des racines quarrées des nombres qui n'ont pas plus de deux chiffres; nous n'inſiſterons pas davantage ſur les racines quarrées de ces nombres. Mais lorſque les nombres ont plus de deux chiffres, il faut de l'art pour en extraire les racines; & c'eſt cet art que nous nous propoſons d'expliquer dans ce Chapitre.

Pour préparer aux opérations que demande l'extraction des racines quarrées, nous commencerons par examiner comment & de quelles parties eſt formé un quarré dont la racine eſt compoſée de deux parties. Nous ferons d'abord cet examen ſur une figure: enſuite nous obſerverons comment les parties d'un nombre quarré ſont diſpoſées dans ce nombre; & de-là nous paſſerons à l'extraction des racines quarrées.

De la Composition des Quarrés.

I.

Fig. 5. 131 Si l'on augmente les côtés contigus *AB*, *AD*, d'un quarré *ABCD*, de deux quantités égales *BE*, *DF*, & qu'on faſſe un ſecond quarré *AEGF* qui ait

ait pour côtés contigus les lignes totales *AE*, *AF*; ce ſecond quarré qu'on aura en multipliant *AE* par *AF* (*N°.* 91.), ou en multipliant ſon côté *AE* par lui-même, ſera compoſé des quatres parties *ABCD*, *BEHC*, *DCIF*, *CHGI* que l'on va faire connoître relativement aux deux parties *AB*, *BE* de ſon côté *AE*.

1°. On trouvera la premiere partie *ABCD*, en multipliant *AB* par *BC* (*N°.* 91.), ou en multipliant *AB* par lui-même; parce que *ABCD* étant un quarré, ſes deux côtés *AB*, *BC* ſont égaux. Ainſi (*N°.* 127.) cette premiere partie *ABCD* ſera nommée le quarré de la premiere partie *AB* du côté *AE*.

2°. On aura la ſeconde partie *BEHC*, en multipliant *BC* par *BE*, ou en multipliant *AB* par *BE*; puiſque les deux côtés *AB*, *BC* du quarré *ABCD*, ſont égaux. Ainſi cette ſeconde partie *BEHC* ſera le produit des deux parties *AB*, *BE* du côté *AE*.

3°. On déterminera la troiſiéme partie *DCIF*, en multipliant *DC* par *DF*, ou en multipliant *AB* par *BE*; puiſque les deux côtés *AB*, *DC* ſont égaux, & que leurs alongemens *BE*, *DF* ſont auſſi égaux. Ainſi cette troiſiéme partie *DCIF* ſera, comme la ſeconde, le produit des deux parties *AB*, *BE* du côté *AE*.

4°. On trouvera la quatriéme partie *CHGI*, en multipliant *CH* par *CI*, ou *BE* par *DF*, ou *BE* par lui-même. Ainſi cette quatriéme partie ſera le quarré de la ſeconde partie *BE* du côté *AE*.

Donc un quarré *AEGF*, ou le produit fait d'une ligne *AE* compoſée de deux parties *AB*, *BE*, multipliée par elle-même, contient le quarré de la premiere partie *AB*, plus deux fois le produit de la premiere partie *AB* multipliée par la ſeconde *BE*,

plus le quarré de la ſeconde parties *BE* ; ou bien le quarré de la premiere partie *AB*, plus le produit du double de la premiere partie *AB* multipliée par la ſeconde *BE*, plus le quarré de la ſeconde partie *BE*.

II.

132 Si l'on repréſente un nombre compoſé de deux parties, par les deux parties d'une ligne, & que l'on conçoive bien dans la Figure cinquiéme toutes les parties d'un quarré conſtruit ſur une ligne compoſée de deux parties; l'on ſentira aiſément que le quarré du nombre entier compoſé de deux parties, contiendra

1°. Le quarré de la premiere partie;

2°. Deux fois le produit de la premiere partie, multipliée par la ſeconde, ou bien le produit fait du double de la premiere partie multipliée par la ſeconde;

3°. Le quarré de la ſeconde partie.

Par exemple ſi le nombre 6 eſt partagé en deux parties 4 & 2; le quarré de 6, ſavoir 36, contiendra le quarré de la premiere partie 4, ſavoir 16; plus le produit du double de la premiere partie 4, ſavoir 8, multiplié par la ſeconde partie 2, ce qui fera 16; plus le quarré de la ſeconde partie 2, ſavoir 4.

III.

133 Quoiqu'on puiſſe partager un nombre quelconque en deux parties de telle grandeur qu'on voudra, nous partagerons toûjours les racines des quarrés en deux parties, dont l'une ſera compoſée d'un nombre de dixaines, & dont l'autre ne contiendra qu'un nombre d'unités ſimples, qui ne paſſera jamais 9.

Le quarré d'un nombre quelconque ainſi partagé en un nombre de dixaines & en un nombre d'unités, contiendra donc le quarré du nombre des dixaines; plus le produit fait du double du nombre des dixaines, multiplié par le nombre des unités; plus le quarré du nombre des unités. Voyons maintenant comment toutes ces parties du quarré d'un nombre, ſont arrangées dans ce quarré.

Un nombre de dixaines, qui a une place à ſa droite, étant multiplié par un nombre de dixaines, lequel a auſſi une place à ſa droite, produira un nombre dont les unités ſeront des centaines, & qui aura par conſéquent deux places à ſa droite (*N°.* 18.) Ainſi le quarré d'un nombre de dixaines aura deux places à ſa droite.

Un nombre de dixaines, qui a une place à ſa droite, étant multiplié par un nombre d'unités, qui n'a rien à ſa droite, produira un nombre dont les unités ſeront des dixaines, & qui n'aura par conſéquent qu'une place à ſa droite. Ainſi le produit fait du double d'un nombre de dixaines, multiplié par un nombre d'unités, n'aura qu'une place à ſa droite.

Un nombre d'unités ſimples, multiplié par un nombre d'unités ſimples, qui n'a rien à ſa droite, donnera un produit compoſé d'unités ſimples, lequel n'aura rien à ſa droite. Ainſi le quarré d'un nombre d'unités ſimples n'aura rien à ſa droite.

Par exemple ſi l'on fait le quarré du nombre 39 compoſé de 3 dixaines & de 9 unités; ce quarré contiendra le quarré de 3 dixaines, plus le produit fait de 6 dixaines multipliées par 9 unités, plus le quarré de 9 unités.

1°. Le quarré de 3 étant 9, le quarré de 3 dixaines ſera 9 centaines, ou 9 avec deux places à ſa droite.

2°. Le produit du double de 3 par 9, ou le produit

de 6 multiplié par 9, ſera 54. Ainſi le produit fait de 6 dixaines multipliées par 9 unités, ſera 54 dixaines, ou 54 avec une place à ſa droite.

3°. Le quarré de la partie 9 unités qui n'a rien à ſa droite, ſera 81 qui n'aura rien à ſa droite.

Ainſi les trois parties du quarré de 39 ſeront { 9..
54.
81

Et le quarré de 39 ſera 1521

IV.

134 Connoiſſant par la compoſition d'un quarré, l'arrangement des différentes parties qu'il contient; lorſqu'on viendra à décompoſer ce quarré, il ne ſera pas difficile d'y connoître toutes les parties qui le forment. Par exemple ſi l'on veut décompoſer le quarré 1521 qu'on vient de faire, en parties relatives au nombre de dixaines & au nombre d'unités de ſa racine; on y procédera de cette maniere.

1°. Le quarré du nombre des dixaines, ayant deux places ou deux chiffres à ſa droite; ſi dans le quarré total 1521, l'on tire une barre qui en ſépare les deux chiffres 21 de la droite, comme ici 15|21; le quarré du nombre des dixaines ſe trouvera dans la partie 15 ſituée a la gauche de la barre, & ſera le plus grand quarré contenu dans cette partie 15.

Si du quarré total	15|21
On retranche le plus grand quarré contenu dans la partie 15, ſavoir	9
Le reſte du quarré ſera	6|21

Or ce reſte 621 doit contenir deux fois le produit du nombre des dixaines, multiplié par le nombre des unités, plus le quarré du nombre des unités.

2°. Mais deux fois le produit fait du nombre des dixaines, multiplié par le nombre des unités, doit avoir une place à ſa droite : ainſi il doit être dans 62 qui n'a qu'un chiffre à ſa droite.

3°. Lorſque de 62, on aura retranché deux fois le produit fait du nombre des dixaines, multiplié par le nombre des unités ; il eſt évident que le reſte de 62, ſuivi du chiffre 1 des unités du nombre propoſé, contiendra le quarré du nombre des unités de la racine totale.

Quoiqu'on puiſſe trouver de la même maniere l'arrangement de toutes les parties d'un quarré dont la racine a plus de deux chiffres ; on ne parlera point ici de la ſituation des parties de ces quarrés, attendu que ce qu'on vient de dire au ſujet des quarrés dont les racines ſont compoſées de deux parties, ſavoir d'un nombre de dixaines & d'un nombre d'unités, ſuffit pour faire entendre ce qu'on va dire de l'extraction des racines quarrées de tous les nombres qu'on peut propoſer.

DE L'EXTRACTION DES RACINES QUARRÉES.

Nous avons dit que l'extraction des racines quarrées, eſt une opération par laquelle on trouve un nombre qui multiplié par lui-même, produit un nombre égal à celui qui eſt propoſé, ou égal au plus grand quarré contenu dans ce nombre propoſé.

PROBLÊME.

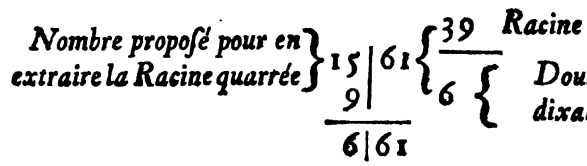
Extraire la racine quarrée d'un nombre propoſé quelconque, ou du plus grand quarré contenu dans ce nombre.

Comme des préceptes généraux ſeroient trop abſtraits pour être entendus facilement, nous n'explique-

rons la méthode d'extraire les racines quarrées, que dans des exemples. Et parce que les opérations qu'il faut faire pour extraire les racines quarrées qui ont plus de deux chiffres, ne different en rien de celles qui ſont néceſſaires pour trouver les racines quarrées compoſées de deux chiffres; l'ordre demande que nous commencions par un exemple où la racine quarrée qu'on tirera, n'ait que deux chiffres; & que nous faſſions voir dans les exemples ſuivans, comment on peut appliquer ce premier exemple, à l'extraction des racines quarrées qui ont plus de deux chiffres.

EXEMPLE PREMIER.

135 *On demande la Racine quarrée du plus grand quarré contenu dans le nombre* 1561.



On mettra, comme on a fait pour la diviſion, un crochet à la droite du nombre propoſé, & l'on tirera dans ce crochet une barre horiſontale, au-deſſus de laquelle on écrira les chiffres de la racine demandée, à meſure qu'on les trouvera, & au-deſſous de laquelle on écrira les nombre dont on aura beſoin pour parvenir à découvrir les chiffres de la racine. Tout étant ainſi préparé, on opérera comme il ſuit.

On conſidérera dans la racine quarrée inconnue que l'on demande, deux parties, l'une compoſée de dixaines, l'autre compoſée d'unités ſimples; & regardant ces deux parties comme celles d'une ligne, on

ſera ſûr (*N°.* 133.) que le plus grand quarré qui ſe trouvera dans le nombre propoſé 1561, contiendra le quarré du nombre inconnu des dixaines, plus deux fois le produit de ce nombre inconnu de dixaines, multiplié par le nombre inconnu des unités, plus le quarré de ce nombre d'unités.

1°. Or le quarré du nombre des dixaines de la racine quarrée, aura deux chiffres à ſa droite (*N°.* 134.). Ainſi en ſéparant, comme nous avons fait, par une barre, les deux chiffres 61 de la droite du nombre propoſé; le quarré inconnu du nombre des dixaines, ſera le plus grand quarré contenu dans la partie 15 ſituée à la gauche de la barre: & comme cette partie 15 n'eſt compoſée que de deux chiffres; l'on verra aiſément (*N°.* 130.) que 9 eſt le plus grand quarré qu'elle contient: d'où il ſuit que 3 qui eſt la racine quarrée de 9, eſt le nombre des dixaines de la racine qu'on demande. On écrira donc 3 dans le crochet, pour le chiffre des dixaines de la racine.

Ayant placé ſous 15 le plus grand quarré 9 que cette partie contient; l'on retranchera 9 de 15, & le nombre propoſé ſe réduira à 6|61 qui doit contenir encore deux fois le produit fait du nombre des dixaines, multiplié par le nombre inconnu des unités, plus le quarré du nombre des unités.

2°. Mais deux fois le produit fait du nombre des dixaines, multiplié par le nombre des unités, doit avoir une place ou un chiffre à ſa droite. Ainſi ce double produit ſera dans la partie 66 du reſte 6|61, & ſera par conſéquent une partie de 66 diviſible par 6; c'eſt-à-dire par le double du nombre 3 des dixaines qu'on vient de trouver.

Or le produit fait du double du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités, étant diviſé par le double du nombre des dixaines, donnera

évidemment pour quotient le nombre des unités. Ainſi pour trouver réguliérement le nombre des unités de la racine quarrée, on doublera le premier chiffre 3 qu'on a écrit à la racine ; & ayant écrit au-deſſous de lui ſon double 6, on diviſera 66 par ce double 6, & l'on ne prendra pas tout le quotient qu'on peut en avoir, mais ſeulement une portion convenable de ce quotient.

Pour choiſir la partie convenable de ce quotient ; l'on remarquera que le nombre des dixaines de la racine étant connu, le nombre des unités qui reſte à trouver ne doit pas ſurpaſſer 9. Ainſi aulieu de prendre tout le quotient 11 qu'on pourroit avoir en diviſant 66 par 6 ; on ne prendra que 9 qu'on écrira pour le chiffre des unités de la racine, à la droite des 3 dixaines qui ſont déja écrites : enſorte que 39 ſera la racine du plus grand quarré contenu dans le nombre propoſé 1561.

La racine 39 qu'on demandoit, étant trouvée ; il faut connoître le reſte de l'opération ; c'eſt-à-dire de combien le nombre propoſé 1561 ſurpaſſe le plus grand quarré qu'il contient, & dont on a extrait la racine ; & pour le connoître, on a deux moyens.

Nombre propoſé	15 | 61	39	*Racine quarrée*
	9 |	69	
	6 | 61		
	6 | 21		
Reſte de l'opération	40		

Le premier moyen eſt d'écrire le chiffre 9 des unités de la racine, à la droite du double 6 de ſes

dixaines ; ce qui compoſera le nombre 69 qu'on multipliera par les 9 unités de la racine, & l'on écrira les chiffres du produit 621 au-deſſous de 661, à meſure qu'on les trouvera. Puis on retranchera le produit 621 de 661 ; & il reſtera 40 pour la quantité dont le nombre propoſé 1561 ſurpaſſe le plus grand quarré qu'il contient.

La raiſon de cette opération eſt ſimple. Nous avons dit que le nombre 661 auquel le nombre propoſé ſe réduiſoit, après en avoir retranché le quarré du nombre des dixaines, contenoit deux fois le produit fait du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités, plus le quarré du nombre des unités. Or 1°. en multipliant le chiffre 9 de 69 par 9, on produit le quarré du nombre des unités. 2°. En multipliant le chiffre 6 de 69 par 9, on fait le produit du double des dixaines multiplié par le nombre des unités. Ainſi en multipliant 69 par 9, le produit 621 qu'on trouve, eſt préciſément deux fois le produit fait du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités, avec le quarré du nombre des unités : & comme on retranche ce produit de 661 qui reſte de 1561, après en avoir ôté le quarré du nombre des dixaines ; il eſt évident que le dernier reſte 40 que l'on trouve, eſt l'excès du nombre propoſé 1561, ſur le plus grand quarré qu'il contient.

Le ſecond moyen pour trouver la quantité dont le nombre propoſé 1561 ſurpaſſe le plus grand quarré qu'il contient, quoique plus ſimple dans la théorie ; eſt plus long dans la pratique. Il conſiſte à multiplier la racine totale 39 par elle-même ; & le quarré qui vient de cette multiplication, étant retranché du nombre entier propoſé 1561 ; le reſte 40 que l'on trou-

ve, eſt l'excès du nombre propoſé ſur le plus grand quarré qu'il contient.

Nombre propoſé	15 | 61	39	*Racine quarrée*
	9 |	6	*Double des dixaines de la Racine.*
	6 | 61		
Quarré de 39	15 | 21		
Reſte de l'opération	40		

Exemple II.

136 *On propoſe d'extraire la Racine quarrée du plus grand Quarré contenu dans le nombre* 156183.

Nombre propoſé dont il faut extraire la racine quarrée	15 | 61 | 83	395	*Racine quarrée*
	9 |	69	
	6 | 61	78	
	6 | 21		
	40 | 83		

Tout étant diſpoſé comme dans l'exemple premier, l'on conſidérera ſeulement deux parties dans la racine inconnue qu'on demande, ſavoir un nombre de dixaines, qui peut avoir pluſieurs chiffres, & un nombre d'unités exprimé par un ſeul chiffre.

On ſçait (*N°.* 133.) que le nombre propoſé contiendra le quarré du nombre des dixaines, plus deux fois le produit fait du nombre des dixaines multiplié

par le nombre des unités, plus le quarré du nombre des unités.

1°. Le quarré du nombre des dixaines, ayant deux chiffres à ſa droite; ſi l'on ſépare par une barre les deux chiffres 83 de la droite du nombre propoſé, le quarré du nombre des dixaines ſera dans la partie 1561 ſituée à la gauche de cette premiere barre. Ainſi l'on ne pourra connoître le nombre de ces dixaines, qu'en tirant la racine du plus grand quarré contenu dans la partie 1561, comme nous avons fait dans l'exemple précédent auquel nous renvoyons pour cette premiere opération.

Ayant découvert (*N°.* 135.) que 39 eſt la racine du plus grand quarré contenu dans 1561, & ayant trouvé 40 pour le reſte de cette opération; le nombre propoſé 156183, diminué par la ſouſtraction du plus grand quarré contenu dans 1561, ſera réduit à 4083 qui contiendra encore deux fois le produit de la premiere partie 39 dixaines, multipliée par le nombre des unités qui eſt encore inconnu, plus le quarré du nombre des unités.

2°. Or deux fois le produit du nombre 39 des dixaines, multiplié par le nombre des unités, doit avoir un chiffre à ſa droite (*N°.* 133.). Ainſi ce double produit ſera dans la partie 408 du reſte auquel ſe réduit le nombre propoſé; & comme deux fois le produit fait du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités, étant diviſé par deux fois le nombre des dixaines, donnera au quotient le nombre des unités; on doublera le nombre 39 des dixaines; puis on diviſera 408 par ce double 78 des dixaines, & le quotient 5 qu'on trouvera, ſera le nombre des unités de la racine qu'on demande. On écrira donc 5 à la droite des 39 dixaines déjà trouvées pour la premiere partie;

& l'on aura 395 pour la racine du plus grand quarré contenu dans le nombre proposé 156183.

La Racine 395 qu'on demandoit étant trouvée, on cherchera de combien le nombre proposé 156183 surpasse le quarré de la racine 395. Le moyen le plus simple est de multiplier 395 par lui-même, & de soustraire de 156183, le produit quarré que l'on trouvera; ce qui donnera 158 pour le reste de l'opération. Mais quoique ce procédé soit le plus simple, il n'est pas le plus court; & l'on aime mieux opérer comme il suit.

Nombre proposé dont il faut extraire la racine quarrée	15 | 61 | 83	395 *Racine quarrée*
	9	69
	6 | 6x	785
	6 | xx	
	40 | 83	
	39 | 25	
Reste de l'opération	1 | 58	

Le chiffre 5 des unités de la racine étant trouvé & écrit à la racine, on l'écrira aussi à la droite des 78 dixaines, qui sont le double de la premiere partie 39 dixaines de la racine; ce qui composera 785 unités qu'on multipliera par les 5 unités de la racine; & l'on aura le produit 3925 dont on écrira les chiffres, à mesure qu'on les trouvera, sous 4083. Enfin l'on ôtera ce produit, de 4083, & le reste 158 qu'on trouvera, sera l'excès du nombre proposé 156183 sur le quarré dont on a trouvé la racine. Nous avons donné la raison de cette opération, à la fin de l'exemple précédent.

Comme le reſte 158 de l'opération, ne ſurpaſſe pas le doublé de la racine qu'on a trouvée, on ne peut pas mettre une unité de plus à cette racine (*N°.* 136.). Ainſi le nombre 395 eſt la racine du plus grand quarré contenu dans le nombre propoſé 156183.

Exemple III.

137 *On propoſe d'extraire la Racine quarrée du plus grand quarré contenu dans le nombre* 258154.

Nombre dont il faut extraire la racine quarrée 25 | 81 | 54 { 508 *Racine quarrée*

zz | — — { 158

.. | 81 — 1008

On a vû dans l'exemple précédent que, pour tirer la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans le nombre propoſé 258154, il faut retrancher, par une barre, les deux chiffres 54 de la droite de ce nombre, & commencer par extraire la racine du plus grand quarré contenu dans la partie reſtante 2581, comme ſi la tranche 54, qu'on a retranché, n'exiſtoit point.

Ayant à tirer la racine du plus grand quarré contenu dans 2581, & conſidérant dans cette racine, deux parties, ſavoir un nombre de dixaines, & un nombre d'unités ſimples repréſenté par un ſeul chiffre; on remarquera que le nombre 2581 doit contenir le quarré du nombre des dixaines de ſa racine, plus le produit fait du double de ces dixaines multiplié par le nombre des unités ſimples, plus le quarré de ce nombre d'unités.

Le quarré du nombre des dixaines ayant (*N°.* 133) deux chiffres à ſa droite; ſi l'on retranche encore, par une barre, les deux chiffres 81 de la droite du nombre 2581; le quarré des dixaines ſera le plus grand quarré contenu dans la tranche 25, & ſera par conſéquent 25 qu'on écrira au-deſſous de cette tranche: enſorte que la racine 5 du quarré 25, ſera le nombre des dixaines de la racine du plus grand quarré contenu dans 2581. On écrira donc 5 dans le crochet, pour le premier chiffre de la racine; & comme ſon quarré 25 étant retranché de la premiere tranche 25, ne donnera point de reſte; on n'aura rien à écrire au-deſſous pour le reſte de la ſouſtraction, & l'on abbaiſſera la deuxiéme tranche 81 du nombre 2581.

Le produit fait de deux fois le nombre 5 des dixaines qu'on a trouvées, multiplié par le nombre des unités, devant avoir un chiffre à ſa droite, ſera néceſſairement contenu dans le chiffre 8 de la tranche 81 qui reſte du nombre 2581: ainſi diviſant 8 par 10, le quotient ſera le nombre des unités de la racine du plus grand quarré contenu dans 2581. Mais 8 ne pouvant pas être diviſé par 10, la racine n'aura point d'unités: on mettra donc un zéro dans le crochet à la droite du 5, pour marquer que le plus grand quarré contenu dans 2581, n'a point d'unités ſimples, & que cette racine eſt 5 *dixaines* ou 50.

Le chiffre 8 *du reſte* 81, *n'étant pas diviſible par* 10, *quelques Commençans ſont tentés de diviſer par* 10 *le reſte entier* 81 *du nombre* 2581 : *mais en cela ils ſe trompent; parce que* 10 *étant le double d'un nombre de dixaines, & par conſéquent un nombre de dixaines lui-même, doit diviſer un nombre de dixaines, & non pas* 81 *qui eſt un nombre d'unités, puiſqu'on n'a point d'égard à la tranche* 54 *qu'on a retranchée la premiere.*

La racine du plus grand quarré contenu dans 2581, n'ayant point d'unités ſimples, le produit fait du double du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités ſimples, & le quarré de ces unités ſeront nuls: ainſi il n'y aura rien à retrancher de 81 pour ce produit & ce quarré; & par conſéquent le reſte 81 ſera l'excès de 2581 ſur le plus grand quarré qu'il contient.

Pour trouver la racine du plus grand quarré contenu dans le nombre propoſé 258154, l'on abbaiſſera ſa derniere tranche 54, à côté du reſte 81 de l'opération qu'on vient de faire, & ayant écrit au-deſſous des deux chiffres 50 qui ſont à la racine, leur double 100; on diviſera (comme il a été expliqué dans l'exemple précédent) par ce double 100 les chiffres 815 qui précédent le dernier de 8154, & le quotient 8 qu'on écrira à la racine, ſera le dernier chiffre de cette racine.

Pour trouver le reſte de l'opération, ou l'excès du nombre propoſé 258154 ſur le plus grand quarré qu'il contient; l'on écrira auſſi le dernier chiffre 8 de la racine à la droite de 100; ce qui fera 1008: puis on multipliera 1008 par le dernier chiffre 8 de la racine & l'on écrira le produit 8064 au-deſſous du reſte 8154 du nombre propoſé: enfin l'on retranchera ce produit 8064 de 8154, & le reſte 90 qu'on trouvera, ſera l'excès du nombre propoſé 258154 ſur le plus grand quarré qu'il renferme.

Exemple IV.

138 *On demande la Racine quarrée du nombre* 15618304.

Nombre dont il faut extraire la racine quarrée } 15 | 61 | 83 | 04

9				3952 *Racine quarrée*
9	61			9 9 1ere. *Opération*
9	61	83		789 2e. *Opération*
9	61	83	04	7902 3e. *Opération*
	49	83		
	39	89		
		1	58	04
		1	58	04
			0	00 00

Tout étant diſpoſé comme dans les exemples précédens, on regardera la racine qu'on demande, comme ſi elle n'avoit que deux parties, l'une compoſée de dixaines, l'autre compoſée d'unités. Ainſi (*N°.* 133.) le nombre propoſé contiendra le quarré du nombre inconnu des dixaines, plus deux fois le produit de ce nombre de dixaines multiplié par le nombre inconnu des unités, plus le quarré de ce nombre d'unités.

1°. Le quarré du nombre des dixaines ayant deux chiffres à ſa droite ; ſi l'on ſépare, par une barre, les deux chiffres 04 de la droite du nombre propoſé ; le quarré du nombre des dixaines ſera le plus grand quarré contenu dans la partie 156183 ſituée à la gauche de la barre qui ſépare 04. Ainſi l'on ne pourra connoître le nombre des dixaines, qu'en tirant la racine

racine quarrée du plus grand quarré contenu dans la partie 156183, comme nous avons fait dans l'exemple précédent auquel nous renvoyons.

Ayant trouvé (*N°.* 136.) que 395 eſt la racine du plus grand quarré contenu dans 156183; ce nombre 395 ſera le nombre des dixaines de la racine: ainſi on l'écrira à la place deſtinée à la racine quarrée.

Comme on a trouvé auſſi (*N°.* 136.) que le quarré de 395, étant ôté de 156183, il reſte 158; il eſt clair que le nombre propoſé 15618304 ſera réduit à 15804 qui contiendra encore deux fois le produit de la premiere partie 395 dixaines, multipliée par le nombre des unités qui eſt encore inconnu, plus le quarré du nombre des unités.

2°. Deux fois le produit fait du nombre des dixaines de la racine, multiplié par le nombre de ſes unités, devant avoir un chiffre à ſa droite, ſe trouvera dans 1580: d'ailleurs ce double produit étant diviſé par deux fois le nombre des dixaines, donnera pour quotient le nombre des unités. On doublera donc les 395 dixaines qui compoſent la premiere partie de la racine; ce qui donnera 790 qu'on écrira au-deſſous. Puis on diviſera 1580 par 790; & le quotient 2 qu'on trouvera, & qu'on écrira à la droite des 395 dixaines, ſera le nombre des unités de la racine: enſorte que la racine quarrée entiere demandée ſera 3952.

Le dernier chiffre 2 de la racine étant trouvé, on l'écrira auſſi à la droite des 790 dixaines qui ont été produites en doublant les 395 dixaines de la racine; ce qui fera 7902 qu'on multipliera par le même chiffre 2 des unités de la racine; & l'on aura le produit 15804 dont on écrira les chiffres ſous 15804, à meſure qu'on les trouvera. Puis on retranchera le

produit 15804 de 15804 qui ſera au deſſus ; & comme il ne reſtera rien, l'on conclura que le nombre propoſé 15618304 eſt un quarré parfait, & que 1952 eſt exactement ſa racine quarrée.

Il eſt clair que le produit 15804 qu'on vient de retrancher, eſt deux fois le produit fait du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités, plus le quarré du nombre des unités : car dans la multiplication de 7902 par 2, lorſqu'on a multplié 2 par 2, on a fait le quarré du nombre 2 des unités ; & lorſqu'on a multiplié 790 par 2, on a fait le produit du double du nombre des dixaines & du nombre des unités.

REMARQUE.

I.

139 1°. Pour tirer la racine quarrée du nombre 15618304, nous avons ſéparé par une barre les deux chiffres 04 de la droite de ce nombre, comme ici, 156183|04 ; & nous avons fait voir qu'en conſidérant ſa racine partagée ſeulement en deux parties, ſavoir en un nombre de dixaines & en un nombre d'unités ; il falloit, pour avoir le nombre de dixaines de la racine, tirer la racine du plus grand quarré contenu dans la partie 156183 ſituée à la gauche de la barre, comme ſi la partie 04 qui eſt à la droite de la barre, n'exiſtoit point.

2°. Dans le ſecond exemple (*N°.* 136.), nous avons tiré la racine du plus grand quarré contenu dans le nombre 156183 ; & pour cela, nous avons encore ſéparé deux chiffres de la droite de ce nombre, comme ici 1561 | 83 ; parce qu'en conſidérant ſa racine partagée en deux parties, l'une compoſée de dixaines, l'autre compoſée d'unités ;

on ne peut avoir le nombre des dixaines, qu'en tirant la racine du plus grand quarré contenu dans la partie 1561 ſituée à la gauche de la barre, comme ſi la partie ſituée à la droite de cette barre n'exiſtoit point.

3°. Dans le premier exemple (*N°.* 135.), nous avons tiré la racine du plus grand quarré contenu dans le nombre 1561 : & pour cela nous avons encore ſéparé par une barre les deux chiffres 61 de la droite de ce nombre, comme ici 15|61 ; parce que, conſidérant encore deux parties dans la racine, un nombre de dixaines & un nombre d'unités, on ne peut avoir le nombre des dixaines, qu'en prenant la racine du plus grand quarré contenu dans la partie 15 placée à la gauche de la barre, comme ſi la partie 61 ſituée à la droite de cette barre, n'exiſtoit point.

Il réſulte de toutes ces opérations, que pour avoir la racine quarrée d'un nombre quelconque, tel que 15618304, il faut ſéparer deux à deux tous les chiffres de ce nombre, en commençant par ceux de la droite, comme ici 15|61|83|04 ; & qu'il faut procéder à l'opération de l'extraction de la racine qu'on demande, dans l'ordre ſuivant.

1°. Il faut prendre la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans la premiere tranche 15 de la gauche, laquelle tranche peut avoir un ou deux chiffres.

2°. Enſuite il faut tirer la racine du plus grand quarré contenu dans les deux premieres tranches 15|61 de la gauche, en prenant pour le nombre des dixaines de cette racine, la racine qu'on a trouvée pour le plus grand quarré contenu dans la premiere tranche 15.

3°. Après cela, il faut extraire la racine du plus grand quarré contenu dans les trois premieres tran-

ches 15|61|83 de la gauche, comme ſi le reſte du nombre propoſé n'exiſtoit point; en prenant pour le nombre des dixaines de cette racine, la racine qu'on a trouvée pour le plus grand quarré contenu dans les deux premieres tranches 15|61.

4°. Enfin il faut chercher la racine quarrée des quatre tranches qui compoſent le nombre propoſé 15|61|83|04, en prenant pour le nombre des dixaines de cette racine, la racine qu'on a trouvée pour les trois tranches précédentes 15|61|83.

En procédant de cette maniere à l'extraction des racines quarrées, c'eſt-à-dire en prenant toûjours la racine quarrée précédemment trouvée, pour le nombre des dixaines de la racine d'un nombre qui aura une tranche de plus que le nombre précédent; l'on parviendra à tirer la racine quarrée d'un nombre, quelque quantité de tranches qu'il puiſſe avoir.

II.

Lorſqu'on trouve un grand nombre, pour l'excès d'un nombre propoſé ſur le plus grand quarré dont on a extrait la racine, & que l'on craint d'avoir mis à la racine une unité de moins qu'il ne faut; on peut reconnoître ſi la racine eſt aſſez grande, par la Regle ſuivante.

Si le reſte de l'Opération ne ſurpaſſe pas le double de la racine qu'on a trouvée, la racine trouvée eſt aſſez grande.

Si le reſte de l'Opération ſurpaſſe d'une unité ou plus, le double de la racine qu'on a trouvée, on peut ajoûter une unité à cette racine ſans la rendre trop grande.

Ainſi dans l'exemple qu'on donne (*N°.* 135.) où le reſte 40 de l'opération, eſt moindre que 78 double de la racine quarrée 39 qu'on a trouvée; on eſt

ſûr que la racine 39 eſt aſſez grande, ou qu'on ne peut pas lui ajoûter une unité, ſans la rendre trop grande. En voici la démonſtration.

Conſidérons 39, & l'unité qu'on voudroit y ajoûter, comme les deux parties d'une ligne. Il eſt clair (*N°.* 132.) que le quarré de la ſomme de ces deux parties, contiendra le quarré de la premiere partie 39, ſavoir 1521; plus deux fois le produit de 39 multiplié par la ſeconde partie 1, ſavoir 78; plus le quarré de la ſeconde partie 1, lequel ſera 1 (*N°.* 127.). Ainſi le quarré de 39 plus 1, ſurpaſſera le quarré de 39, de 78 plus 1, c'eſt-à-dire de deux fois 39 plus 1. D'où il ſuit que ſi après avoir trouvé 39 pour la racine du plus grand quarré contenu dans un nombre, il ne reſte pas deux fois 39 plus 1, c'eſt-à-dire 79; on ne pourra pas mettre une unité de plus à la racine 39. Il eſt évident qu'il en ſera de même des autres racines qui ne pourront pas être augmentées, lorſque le reſte de l'opération ne ſurpaſſera pas le double de la racine qu'on aura trouvée.

Juſqu'ici nous n'avons parlé que de l'extraction de la racine du plus grand quarré contenu dans un nombre propoſé; & nous n'avons fait aucun uſage du reſte de l'opération. Nous allons voir maintenant comment on peut approcher de plus en plus de la racine d'un nombre qui n'eſt point quarré, & comment on tire la racine quarrée d'une fraction.

PROBLÊME.

140 *Approcher ſi près qu'on voudra de la racine quarrée d'un nombre qui n'eſt pas un quarré parfait.*

Nous avons vû (*N°.* 27.) qu'un nombre qui contient des parties décimales, étant multiplié par un

nombre qui contient auſſi des parties décimales; il en réſulte un produit qui a autant de rangs de décimales, qu'il y en a dans les deux facteurs de la multiplication. Ainſi quand un nombre qui aura des décimales, ſera multiplié par lui-même, pour avoir ſon quarré, ce quarré aura deux fois autant de chiffres décimaux que ſa racine. Par exemple, le quarré d'un nombre qui contiendra des *dixiémes*, aura des *centiémes*; celui d'un nombre qui contiendra des *centiémes*, aura des *dix-milliémes*: & ainſi des autres; en ſorte que le nombre des rangs décimaux d'un quarré, ſera toûjours un nombre pair.

Et réciproquement, lorſqu'on tirera la racine quarrée d'un nombre qui aura des parties décimales, la racine aura moitié moins de chiffres décimaux que le quarré; c'eſt-à-dire que la racine quarrée d'un nombre qui contiendra des *centiémes*, n'aura que des *dixiémes*; celle d'un nombre qui contiendra des *dix-milliémes*, n'aura pas des unités d'un plus bas ordre que les *centiémes*: & ainſi des autres; en ſorte qu'on ne pourra tirer la racine quarrée, que des nombres qui auront un nombre pair de rangs décimaux.

Cela poſé, lorſqu'un nombre propoſé ne ſera pas un quarré parfait, & qu'on voudra approcher de ſa racine, de maniere que la racine qu'on trouvera ne differe pas d'un *dixiéme*, ou d'un *centiéme*, ou d'un *milliéme*, ou d'une unité décimale d'une ordre quelconque, de la véritable racine de ce nombre; on cherchera ſa racine en *dixiémes*, ou en *centiémes* &c. Pour cela, on réduira le nombre propoſé en décimales, dont la derniere ſoit d'un ordre double de celui de la derniere partie décimale qu'on veut avoir à la racine; ce qui ne ſera pas bien difficile, puiſqu'on n'aura qu'à mettre à la droite du nombre propoſé

deux fois autant de zéros qu'on veut avoir de chiffres décimaux à la racine, & ſéparer ces zéros du nombre propoſé par une virgule qui en faiſant diſtinguer les chiffres de la progreſſion décuple, fera voir en quelles eſpéces de décimales le nombre propoſé aura été réduit.

Le nombre propoſé étant ainſi préparé, l'on en tirera la racine quarrée, comme s'il n'étoit point réduit en décimales; & lorſque la racine ſera trouvée, on y mettra une virgule, qui en ſéparera vers la droite un nombre de chiffres, égal à la moitié du nombre des zéros qu'on aura mis à la droite du nombre propoſé.

Exemple.

141 *On propoſe de tirer la racine quarrée du nombre 647, & d'approcher de ſa racine exacte, juſqu'à la centiéme partie d'une unité.*

Comme le dernier chiffre de la racine qu'on trouvera, repréſentera des *centiémes*, & qu'il y aura par conſéquent deux figures décimales dans la racine; il faudra mettre 4 zéros à la droite du nombre propoſé 647, après lequel on aura premiérement mis une virgule; & l'on aura (647, 0000) dont on extraira la racine quarré, de la même maniere que ſi ce nombre étoit 6470000.

En tirant la racine quarrée de ce nombre ſuivant les regles ci-devant expliquées (*N°.* 138.), on la trouvera égale à 2543; & le quarré de cette racine ſera moindre que 6470000, de 3151.

Mais le nombre (647, 0000) dont il falloit extraire la racine, ayant quatre figures décimales, ſa racine doit en avoir deux. On mettra donc dans la racine 2543 qu'on a trouvée, une virgule qui ſéparera les deux chiffres 43 des autres; & l'on aura

(25, 43) ou 25 $\frac{43}{100}$, pour la racine du nombre (647, 0000) ou 647, approchée de la racine exacte autant qu'on le demandoit.

PROBLÉME.

142 *Trouver la racine quarrée d'une fraction.*

On tirera la racine quarrée du numérateur, & celle du dénominateur de la fraction propoſée; & la fraction qui aura pour numérateur la premiere racine & pour dénominateur la ſeconde, ſera la racine quarrée de la fraction propoſée.

Car la racine quarrée d'une fraction propoſée, eſt une fraction qui, multipliée par elle-même, donne un produit égal à la fraction propoſée. Or une fraction qui a pour numérateur & pour dénominateur, les racines quarrées du numérateur & du dénominateur de la fraction propoſée, étant multipliée par elle-même, donne un produit égal à la fraction propoſée. Donc la fraction qui a pour numérateur & pour dénominateur, les racines du numérateur & du dénominateur de la fraction propoſée, eſt la racine quarrée de cette fraction propoſée.

Quoique la Regle qu'on vient de propoſer ſoit générale, ſon application demande qu'on faſſe pluſieurs remarques ſur les différens cas qui peuvent arriver.

I.

143 Lorſque le numérateur & le dénominateur d'une fraction ſeront des quarrés parfaits, on aura exactement les racines de ces quarrés; & l'on aura par conſéquent exactement la racine quarrée de la fraction.

Par exemple ſi l'on propoſe de tirer la racine quarrée de la fraction $\frac{64}{225}$ dont le numérateur & le dénominateur ſont des quarrés parfaits; on tirera exactement les racines de 64 & de 225, qui ſeront 8 & 15; & la fraction $\frac{8}{15}$ ſera la racine quarrée de $\frac{64}{225}$, ſans aucun reſte.

II.

144 Si le dénominateur de la fraction eſt un nombre quarré, & que le numérateur ne ſoit pas un nombre quarré, l'on ne pourra pas tirer exactement la racine du numérateur; mais le défaut de la racine ſera moindre qu'une unité fractionnaire d'une dénomination pareille à celle de la racine du dénominateur.

Par exemple ſi l'on propoſe de tirer la racine quarrée de la fraction $\frac{50}{81}$ dont le dénominateur eſt un nombre quarré qui a 9 pour racine, & dont le numérateur 50 n'eſt pas un nombre quarré; l'on prendra la racine du plus grand quarré contenu dans le numérateur 50; & cette racine étant 7, on aura $\frac{7}{9}$ pour la racine de la fraction propoſée $\frac{50}{81}$, à peu de choſes près.

Si l'on veut approcher davantage de la racine de la fraction $\frac{50}{81}$, on pourra multiplier le numerateur 50 & le dénominateur 81 par un nombre quarré quelconque, par exemple par 100, ou par 10000, ou par 1000000 &c. en mettant un nombre pair égal de zéros à la droite du numérateur & du dénominateur; ce qui n'empêchera pas le dénominateur de reſter un quarré parfait. Enſuite on tirera les racines quarrées des deux termes de la fraction ainſi préparée. Par exemple ſi l'on multiplie les deux termes de la fraction $\frac{50}{81}$ par 10000, on aura $\frac{500000}{810000}$; & tirant

les racines quarées des deux termes de cette fraction; l'on aura à peu de choſe près, 707 pour celle du numérateur, & exactement 900 pour celle du dénominateur. Ainſi la racine quarrée de $\frac{500000}{810000}$ ou de $\frac{50}{81}$, ſera $\frac{707}{900}$ à peu de choſe près.

III.

145 Si aucun des termes de la fraction dont on veut tirer la racine quarrée, n'étoit un quarré parfait; on multiplieroit ſes deux termes par ſon dénominateur; ce qui feroit une nouvelle fraction égale à la premiere, & dont le dénominateur ſeroit un quarré. Ainſi l'on pourroit en tirer la racine, comme on vient de le dire.

Par exemple ſi l'on propoſe de tirer la racine de cette fraction $\frac{5}{6}$, on en multipliera les deux termes 5 & 6 par 6; & l'on aura cette nouvelle fraction $\frac{30}{36}$ égale à la premiere, dont la racine ſera $\frac{5}{6}$ à quelque choſe près.

Mais ſi l'on ne trouve point cette racine aſſez exacte, on mettra un nombre pair égal de zéros, par exemple 4 zéros, à la droite des deux termes de la fraction $\frac{30}{36}$; ce qui donnera cette nouvelle fraction $\frac{300000}{360000}$ égale à la premiere $\frac{30}{36}$ ou $\frac{5}{6}$: & tirant la racine des deux termes de cette nouvelle fraction, l'on aura cette autre fraction $\frac{547}{600}$, qui ſera la racine approchée de la fraction $\frac{300000}{360000}$, ou de la fraction propoſée $\frac{5}{6}$.

IV.

146 On peut encore extraire la racine quarrée d'une fraction, en réduiſant la fraction propoſée en une ſuite de parties décimales, qu'on arrête où l'on veut, plus ou moins loin, ſuivant qu'on deſire avoir

une racine plus ou moins exacte. Enſuite on tire la racine quarrée de cette ſuite, & la racine qu'on trouve eſt celle de la fraction propoſée.

Suppoſons qu'on veuille avoir la racine quarrée de la fraction $\frac{1}{7}$. On diviſera 1 par 7, & l'on aura (*N°.* 45.) la ſuite de décimales (0, 142857 &c.) dont les chiffres décimaux, à compter depuis la virgule, doivent être en nombre pair. Puis on extraira la racine quarrée de cette ſuite; & lon trouvera pour cette racine, un peu moins que (0, 378). Mais il faut remarquer qu'on doit avoir trois chiffres décimaux après la virgule; parce qu'il y a ſix chiffres décimaux à la droite de la virgule du nombre dont on a tiré la racine.

PROBLÈME.

147 *Trouver la racine quarrée d'un nombre complexe compoſé de toiſes quarrées, de toiſes-pieds, de toiſes-pouces &c. tel que*

24^{TT}	1^{TP}	0^{Tp}	6^{TL}	4^{T}	5^{P}	$6p$	
16				8^{T}	5^{P}		
8	49			4^{TT}	2^{TP}	6^{Tp}	
7	2	2		2	5	8	
	4^{TP}	10^{Tp}		7^{TT}	2^{TP}	2^{Tp}	
		98		9^{T}	4^{P}	$6p$	
	4^{TP}	10^{Tp}	6^{TL}		4^{TP}	10^{Tp}	6^{TL}
0	0	0	0				

1°. On commencera par extraire la racine quarrée du nombre des toiſes quarrées, contenu dans le nombre complexe propoſé. Comme cette opération a été

ſuffiſamment expliquée, elle ne ſouffrira aucune difficulté; & l'on trouvera 4 toiſes pour la premiere partie de la racine, & 8 toiſes quarrées pour le reſte de cette premiere opération.

2°. Pour trouver le nombre de pieds de la racine, on réduira, pour un moment ſeulement, en toiſe-pied, les 8^{TT} reſtantes de l'opération précédente; ce qui donnera 48^{TP}, leſquelles avec 1^{TP} qui ſe trouve dans le nombre complexe propoſé, feront 49^{TP} qu'on écrira auſſi pour un moment ſeulement, & qu'on effacera lorſqu'on n'en aura plus beſoin. On doublera enſuite les 4^{T} qu'on a trouvées pour la racine; ce qui donnera 8^{T}. Puis on diviſera 49^{TP} par 8^{T}; ce qui donnera 5^{P} pour le quotient, & pour le nombre des pieds de la racine. On écrira donc 5^{P} à la racine, & l'on mettra auſſi ces 5^{P} à la droite de 8^{T}: puis on effacera les 49^{TP} dont on n'a plus beſoin; parce que les 8^{TT} 1^{TP}, à la place deſquelles on avoit pris 49^{TP}, ſeront plus commodes pour le reſte de l'opération.

Pour avoir le reſte de cette ſeconde opération, l'on multipliera par le nouveau terme 5^{P} de la racine, les 8^{T} 5^{P} qu'on a écrits au-deſſous; ce qui, en ſuivant les Regles du Toiſé, donnera 7^{TT} 2^{TP} 2^{Tp} qu'on écrira en partie au-deſſous des 8^{TT} qui reſtent de l'opération précédente, & en partie au-deſſous de 1^{TP} 0^{Tp} qui ſe trouvent dans le nombre complexe propoſé, & qui n'ont point encore été employées. Enſuite on ſouſtraira ce produit de 8^{TT} 1^{TP} 0^{Tp}; & l'on aura 4^{TP} 10^{Tp} pour le reſte de cette opération.

3°. Pour trouver le nombre des pouces de la racine, on multipliera par 12 les 4^{TP} reſtantes de l'opération précédente, pour les réduire en toiſe-pouce; ce qui produira 48^{Tp}, leſquelles avec 10^{Tp}

qu'on a auſſi de reſte feront $58^{T}p$ qu'on écrira à part pour un moment ſeulement. Enſuite on doublera les $4^{T}\ 5^{P}$ qu'on a trouvés pour la racine; ce qui fera $9^{T}\ 4^{P}$: puis on diviſera $58^{T}p$ par $9^{T}\ 4^{P}$, ou par la premiere partie 9^{T}; ce qui donnera $6p$ pour le quotient & pour le nombre des pouces de la racine demandée. Ainſi l'on écrira $6p$ à la racine; & l'on mettra auſſi ces $6p$ à la droite du double $9^{T}\ 4^{P}$ des deux premieres parties de la racine: après quoi l'on effacera $58^{T}p$ dont on n'a plus beſoin; parce que les $8^{T}P\ 10^{T}p$ qui ſont au-deſſus en tiendront lieu, & ſeront plus commodes.

Pour avoir le reſte de cette troiſiéme opération, l'on multipliera par le nouveau terme $6p$ de la racine, les $9^{T}\ 4^{P}\ 6p$ qui ſont au-deſſous; ce qui, en ſuivant les regles du Toiſé, donnera $4^{T}P\ 10^{T}p\ 6^{T}L$: & ayant écrit les termes de ce produit, en partie au-deſſous des $4^{T}P\ 10^{T}p$ qui reſtent des opérations précédentes, & en partie au-deſſous des $6^{T}L$ qui ſe trouvent dans le nombre complexe propoſé, & dont on n'a point encore fait uſage; on les ſouſtraira des termes ſupérieurs. Comme il ne reſtera rien, ce ſera une marque que le nombre propoſé $24^{TT}\ 1^{T}P\ 0^{T}p\ 6^{T}L$ eſt un quarré parfait; & que le nombre complexe $4^{T}\ 5^{P}\ 6p$ qu'on a trouvé, eſt ſa racine exacte.

CHAPITRE II.

De la Compoſition des Cubes, & de l'Extraction des Racines cubiques.

DÉFINITIONS.

148 LORSQU'UN nombre eſt multiplié par lui-même, & que le quarré produit par cette multiplication, eſt encore multiplié par le même nombre; le produit de cette ſeconde multiplication ſe nomme *Cube* de ce nombre; & ce nombre premiérement multiplié s'appelle la *Racine cubique* de ce Cube.

Par exemple ſi l'on multiplie 5 par 5, & que le quarré 25 produit par cette multiplication, ſoit encore multiplié par 5; le produit 125 de cette ſeconde multiplication ſera nommé le *Cube* du nombre 5 premiérement multiplié; & ce nombre 5 s'appellera la *Racine cubique* du Cube 125.

Si l'on multiplie 1 par 1, & que le quarré 1 produit par cette multiplication, ſoit encore multiplié par 1; le nouveau produit qui ſera auſſi 1, ſera le cube de 1 premiérement multiplié; en ſorte que le quarré & le cube de 1 ſeront égaux à leur racine 1: & comme tous les nouveaux produits qu'on aura en multipliant continuellement par 1, ne donneront jamais que 1; l'on conclurra que tous ces produits, qu'on appelle *Puiſſances de l'unité*, ſont égaux à leur racine premiérement multipliée.

L'Extraction de la racine cubique eſt une opération par laquelle on trouve un nombre, qui multiplié par ſon quarré, produit un nombre égal à celui qui eſt propoſé pour en extraire la racine cubique.

Lorſque le nombre propoſé eſt produit par la multiplication d'un quarré par ſa racine, c'eſt-à-dire lorſqu'il eſt véritablement un cube; on peut toûjours en tirer la racine cubique; mais lorſque le nombre propoſé n'eſt pas le juſte produit de la multiplication d'un quarré par ſa racine, il n'eſt pas poſſible d'en avoir exactement la racine cubique; & il faut ſe contenter d'extraire la racine cubique du plus grand cube contenu dans ce nombre propoſé.

149 Lorſqu'un nombre n'a pas plus de trois chiffres, ſa racine cubique ne peut avoir qu'un chiffre. Car le plus petit nombre repréſenté par plus de trois chiffres eſt 1000, & la racine cubique de 1000 eſt 10; puiſque 10 multiplié par 10 produit le quarré 100, & que le quarré 100 multiplié par 10 produit le cube 1000. Ainſi un nombre qui n'a pas plus de trois chiffres, ou qui eſt moindre que 1000, doit avoir un nombre moindre que 10 pour ſa racine cubique, ou pour la racine du plus grand cube qu'il contient. Or un nombre moindre que 10 s'exprime par un ſeul chiffre.

150 Si le nombre avoit plus de trois chiffres, ſa racine cubique auroit plus d'un chiffre; puiſque le moindre des nombres qui ont plus de trois chiffres eſt 1000, & que la racine cubique de 1000 eſt 10 qui a plus d'un chiffre.

Les regles pour extraire la racine cubique d'un nombre qui a plus de trois chiffres, ſuppoſent qu'on ſait tirer celle d'un nombre qui n'a pas plus de trois chiffres. Ainſi nous allons donner une petite Table, dans laquelle on trouvera les neuf cubes qui n'ont qu'un chiffre à leur racine cubique, avec leurs racines cubiques au-deſſus. Nous y joindrons le cube 1000 avec ſa racine cubique 10 au-deſſus.

Racines cubiques	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Cubes	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

151 Lorſqu'on ne connoîtra pas la racine cubique d'un nombre qui n'aura pas plus de trois chiffres, on cherchera ce nombre dans la bande des cubes; ſi on l'y trouve, le nombre qu'on verra au-deſſus, ſera exactement la racine cubique de ce nombre. Mais ſi le nombre propoſé ne ſe trouve pas dans la bande des cubes, l'on prendra dans cette bande un cube plus petit que lui, & qui en approchera le plus; & le nombre qu'on trouvera au-deſſus de ce cube, ſera la racine cubique du plus grand cube contenu dans le nombre propoſé.

Par exemple ſi l'on demande la racine cubique du nombre 950 qui n'eſt point dans la bande des cubes; l'on prendra dans cette bande le cube 729 plus petit que 950, & qui en approche le plus; & l'on trouvera au-deſſus de ce cube le nombre 9 qui ſera la racine cubique du plus grand cube contenu dans le nombre propoſé 950.

Pour préparer aux opérations de l'extraction de la racine cubique d'un nombre compoſé de plus de trois chiffres; nous examinerons d'abord, comment & de quelles parties eſt formé un cube dont la racine eſt une ligne compoſée de deux parties: & conſidérant enſuite dans une racine numérique deux parties que nous repréſenterons par les deux parties d'une ligne; l'examen que nous aurons fait de la compoſition de la figure d'un cube, nous conduira à trouver les parties dont un cube numérique ſera compoſé.

DE LA COMPOSITION DES CUBES.

I.

152 Nous avons vû (*N°.* 92.) qu'un parallélépipede rectangle eſt égal au produit de ſa longueur & de ſa largeur, multiplié par ſon épaiſſeur; c'eſt-à-dire que pour avoir le nombre des meſures ſolides contenues dans un parallélépipede, il faut multiplier ſa longueur par ſa largeur, & multiplier encore le produit par l'épaiſſeur du parallélépipede.

Donc un cube dont les trois dimenſions, la longueur, la largeur & l'épaiſſeur, ſont de même grandeur, eſt égal au produit fait d'un de ſes côtés, multiplié par le quarré du même côté; c'eſt-à-dire que pour avoir le nombre des meſures cubiques contenues dans ce cube, il faut multiplier un de ſes côtés par lui-même, & multiplier encore le quarré réſultant de cette multiplication, par le même côté.

153 Soit un premier cube *ABHCDLKI*, dont la longueur *AB*, la largeur *AC*, & l'épaiſſeur *AD*, ſoient les côtés contigus à un même angle *A*. Si l'on ajoûte à ces côtés égaux, que nous nommerons auſſi racines du cube, des parties égales *AE*, *AF*, *AG*, afin de faire un ſecond cube plus grand qui ait pour côtés ou racines, les lignes totales *BE*, *CF*, *DG*; il faudra premiérement mettre ſur les trois faces quarrées égales *ABLD*, *ACID*, *ABHC* du cube propoſé, trois parallélépipedes *ABLDFMNO*, *ACIDEPQR*, *ABHCGVTS* qui auront des baſes égales à ces faces quarrées, & qui auront pour épaiſſeurs les parties égales *AE*, *AF*, *AG* qu'on a ajoûtées aux racines du cube *ABHCDLKI*. Enſuite il faudra mettre dans les angles ou eſpeces Fig. 6.

de marches, que laiſſeront entr'eux ces trois parallélépipedes, trois autres parallélépipedes égaux *AFYGBMV*, *AEXGCPS*, *AFZEDOR* qui auront tous trois pour baſes les quarrés *AFYG*, *AEXG*, *AFZE* égaux à ceux des parties égales qu'on a ajoûtées aux racines du premier cube. Enfin pour rendre complet le nouveau cube, il faudra encore ajoûter le cube *AFZEYGX* qui a pour racines les parties égales *AE*, *AF*, *AG* dont on a augmenté les racines ou côtés du premier cube : en ſorte que le nouveau cube, dont chaque côté ſera compoſé de deux parties, contiendra le cube de la premiere partie d'un de ſes côtés ; plus trois parallélépipedes égaux qui auront chacun pour baſe le quarré de la premiere partie, & pour hauteur ou épaiſſeur la ſeconde partie ; plus trois autres parallélépipedes égaux qui auront pour baſes des quarrés égaux à celui de la ſeconde partie, & pour hauteur la premiere partie ; plus enfin le cube de la ſeconde partie.

II.

154 Si l'on repréſente un nombre par les deux parties d'une ligne, & que l'on conçoive bien ſur la figure ſixiéme toutes les parties ſolides qui compoſent un cube dont le côté eſt de deux parties ; l'on ſentira aiſément que le cube du nombre contiendra.

1°. Le cube de ſa premiere partie, qu'on trouvera en multipliant cette premiere partie par elle-même, & en multipliant encore par la même premiere partie, le quarré que produira cette multiplication.

2°. Trois produits égaux à trois parallélépipedes qui auront pour baſes des quarrés égaux à celui de la premiere partie, & pour épaiſſeur la ſeconde partie ; leſquels produits on trouvera, en multipliant la pre-

miere partie du nombre par elle-même, & en multipliant encore le triple du quarré que produira cette multiplication, par la ſeconde partie du nombre.

3°. Trois autres produits égaux à trois parallélépipedes qui auront pour baſes des quarrés égaux à celui de la ſeconde partie, & pour épaiſſeur la premiere partie; leſquels on trouvera, en multipliant la ſeconde partie par elle-même, & en multipliant encore le triple du quarré que produira cette multiplication, par la premiere partie du nombre.

4°. Un produit égal au cube de la ſeconde partie, lequel on aura en multipliant la ſeconde partie par elle-même, & en multipliant encore le quarré que produira cette multiplication, par la même ſeconde partie.

III.

155 Les deux parties dans leſquelles nous partagerons la racine d'un cube numérique quelconque, ſeront toûjours, l'une un nombre de dixaines, qui pourra être exprimé par tant de chiffres qu'on voudra; l'autre un nombre d'unités qui n'aura jamais qu'un ſeul chiffre. Ainſi le cube d'un nombre compoſé de ces deux eſpéces de parties, contiendra le cube du nombre des dixaines de la racine; plus le produit fait de trois fois le quarré du nombre des dixaines, multiplié par le nombre des unités; plus le produit fait de trois fois le quarré du nombre des unités, multiplié par le nombre des dixaines; plus le cube du nombre des unités. Mais pour connoître l'arrangement de ces quatre différentes parties dans un cube numérique; il faut rappeller quelques propriétés des nombres, que nous avons déja expliquées.

Nous avons vû (N°. 18. & dans le cours du Chapitre de la multiplication des nombres incomplexes)

que le produit de deux nombres multipliés l'un par l'autre, a toûjours à ſa droite autant de zéros ou de rangs, qu'il y en a en tout à la droite du nombre multiplié & à la droite du nombre par lequel on multiplie.

Il ſuit de la que le produit de trois nombres multipliés enſemble, aura toûjours à ſa droite autant de rangs, qu'il y en aura en tout à la droite des trois nombres multipliés enſemble. Par exemple ſi l'on multiplie un nombre de dixaines, qui a une place à ſa droite, par un nombre de dixaines ; & qu'on multiplie encore le produit de cette multiplication, par un nombre de dixaines, le nouveau produit aura trois places à ſa droite ; parce que le produit des deux premiers nombres de dixaines multipliés l'un par l'autre, aura deux places à ſa droite (*N°.* 18.), & que ce produit étant encore multiplié par un nombre de dixaines, qui a une place à ſa droite, acquerera une troiſiéme place à ſa droite.

156 Donc le cube d'un nombre de dixaines aura trois places à ſa droite ; puiſque ce cube eſt fait par la multiplication d'un nombre de dixaines par un nombre de dixaines, dont le produit eſt encore multiplié par un nombre de dixaines.

Le quarré d'un nombre de dixaines qui a deux places à ſa droite, étant multiplié par un nombre d'unités ſimples, qui n'a point de place à ſa droite ; le produit aura deux places à ſa droite.

Le quarré d'un nombre d'unités, qui n'a point de place à ſa droite, étant multiplié par un nombre de dixaines qui a une place à ſa droite ; le produit n'aura qu'une place à ſa droite.

Enfin le cube d'un nombres d'unités n'aura point de place à ſa droite ; parce que ſes trois facteurs n'ont point de place à leur droite.

Pour donner une idée de l'arrangement des parties d'un cube, ſuppoſons qu'on veut avoir le cube du nombre 39 compoſé de 3 dixaines & de 9 unités. Il eſt prouvé (*N°.* 155.) que le cube qu'on demande contiendra le cube de 3 dixaines, plus 3 fois le quarré de 3 dixaines multiplié par 9 unités, plus 3 fois le quarré de 9 unités multiplié par 3 dixaines, plus le cube de 9 unités.

1°. Le cube de 3 étant 27 (*N°.* 150.), le cube de 3 dixaines ſera 27 ſuivi de trois places à ſa droite.

2°. Le quarré de 3 ſera 9; 3 fois le quarré de 3 ſera 27; enfin 3 fois le quarré de 3 multiplié par 9 ſera 243. Ainſi 3 fois le quarré de 3 dixaines multiplié par 9 unités, ſera 243 avec deux places à ſa droite.

3°. Le quarré de 9 unités eſt 81; trois fois le quarré de 9 unités eſt 243; enfin 3 fois le quarré de 9 unités multiplié par 3 eſt 729. Ainſi 3 fois le quarré de 9 unités multiplié par 3 dixaines, ſera 729 avec une place à ſa droite.

4°. Le cube de 9 unités ſera 729 ſans aucune place à ſa droite.

Ainſi les quatre parties du cube de 39 ſeront	27... 243.. 729. 729
Et le cube de 39 ſera	59319

Connoiſſant par la compoſition d'un cube, l'arrangement des différentes parties qu'il contient; lorſqu'on voudra décompoſer ce cube, il ne ſera pas difficile d'y connoître toutes les parties dont il eſt formé. Par exemple ſi l'on veut décompoſer le cube

59319 qu'on vient de faire, en parties relatives à un nombre de dixaines & à un nombre d'unités, dont on ſuppoſera que ſa racine eſt compoſée; on y procédera comme il ſuit.

1°. Comme le cube du nombre des dixaines, doit avoir trois places à ſa droite; on ſéparera par une barre les trois chiffres de la droite du cube propoſé 59319, comme ici, 59|319; & le cube des dixaines de la racine ſe trouvera dans la partie 59 ſituée à la gauche de la barre, & ſera le plus grand cube contenu dans 59, ſavoir 27.

Si du cube total donné	59|319
On retranche le plus grand cube contenu dans la partie 59, ſavoir	27|
Le cube total ſe réduira au reſte	32|319

Or ce reſte 32319 doit contenir 3 fois le quarré du nombre des dixaines, multiplié par le nombre des unités; plus 3 fois le quarré du nombre des unités, multiplié par le nombre des dixaines; plus le cube du nombre des unités.

2°. Trois fois le quarré du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités, devant avoir deux places à ſa droite, ne peut être que dans 323 qui a deux chiffres à ſa droite.

Quoiqu'on puiſſe trouver de la même maniere la ſituation des deux autres parties du cube; comme il importe peu de connoître ces deux autres parties, pour trouver la racine d'un cube, ou du plus grand cube contenu dans un nombre propoſé; nous n'inſiſterons pas davantage ſur l'arrangement des parties d'un cube; & nous paſſerons à la méthode pour extraire la racine cubique d'un nombre quelconque.

DE L'EXTRACTION DES RACINES CUBIQUES.

PROBLÉME.

Trouver la racine cubique d'un nombre proposé quelconque, ou du plus grand cube contenu dans ce nombre.

Comme des exemples feront mieux entendre la solution de ce problême, que des préceptes généraux qui pourroient être trop abstraits; nous appliquerons à différens exemples les regles que nous devons expliquer: & parce que les opérations qu'il faudra faire pour extraire les racines cubiques qui auront un grand nombre de chiffres, ne différent en rien de celles qui sont nécessaires pour trouver les racines cubiques composées de deux chiffres; nous commencerons par un exemple où la racine cubique n'aura que deux chiffres; & nous ferons voir dans les exemples suivans, comment on applique les regles du premier exemple, à l'extraction des racines cubiques qui ont plus de deux chiffres.

EXEMPLE PREMIER.

157 *On demande la racine cubique du plus grand cube contenu dans le nombre* 61723.

Nombre proposé 61|723 { 39 *Racine cubique*

27 { *Triple du quarré des dixaines*

27

34|723

59|319

Reste de l'opération 2|404

On mettra, comme l'on a vû ci-dessus, un crochet à la droite du nombre proposé; & l'on tirera dans

ce crochet une barre horriſontale, au-deſſus de laquelle on écrira les chiffres de la racine cubique demandée, à meſure qu'on les trouvera, & au-deſſous de laquelle on écrira les nombres dont on aura beſoin pour découvrir les chiffres de la racine. Tout étant ainſi diſpoſé, voici ce qu'on fera.

On conſidérera dans la racine cubique inconnue, deux parties, l'une compoſée de dixaines, l'autre compoſée d'unités ſimples; & l'on ſera aſſuré (*N°.* 155.) que le plus grand cube contenu dans le nombre propoſé 61723, renfermera le cube du nombre inconnu des dixaines, plus le produit fait de trois fois le quarré du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités, plus trois fois le quarré du nombre des unités multiplié par le nombre des dixaines, plus le cube du nombre des unités.

Or le cube du nombre des dixaines de la racine cubique qu'on demande, aura trois chiffres à ſa droite (*N°.* 156.). Ainſi en ſéparant, comme nous avons fait par une barre verticale, les trois chiffres 723 de la droite du nombre propoſé; le cube du nombre inconnu des dixaines de la racine cubique, ſe trouvera dans la partie 61 ſituée à la gauche de la barre, & ſera le plus grand cube contenu dans cette partie 61. Or cette partie 61 n'étant compoſée que de deux chiffres, l'on trouvera (*N°.* 150.) que 27 eſt le plus grand cube qu'elle renferme; & que 3, qui eſt la racine cubique de 27, eſt par conſéquent le nombre des dixaines de la racine cubique qu'on demande. On écrira donc 3 dans le crochet, pour le chiffre des dixaines de la racine cubique.

Ayant placé ſous 61 le plus grand cube 27 que cette partie contient, l'on retranchera 27 de 61; & par cette ſouſtraction, le nombre propoſé ſe réduira à 34|723 qui doit contenir encore trois fois le

quarré du nombre trouvé (3) des dixaines multiplié par le nombre inconnu des unités, plus trois fois le quarré du nombre des unités multiplié par le nombre des dixaines, plus le cube du nombre des unités. Mais nous n'avons beſoin que de la premiere de ces trois parties.

Or trois fois le quarré du nombre des dixaines, multiplié par le nombre des unités, doit avoir deux places à ſa droite (*No.* 156.). Ainſi ce produit ſera dans la partie 34|7 qui a deux chiffres à ſa droite. Mais le produit fait de trois fois le quarré du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités, étant diviſé par trois fois le quarré du nombre des dixaines, donnera évidemment pour quotient le nombre des unités. Donc pour trouver le nombre des unités, on fera d'abord le quarré du nombre 3 des dixaines, qui ſera 9; puis on triplera ce quarré 9, & l'on écrira le produit 27 ſous la racine; enfin l'on diviſera 34|7 par 27, & le quotient qu'on trouvera ſera le nombre des unités qu'on cherche. Sur quoi il faut remarquer qu'on ne doit pas toûjours prendre le quotient entier que cette diviſion peut donner, mais ſeulement une partie convenable de ce quotient. Ainſi quoique le diviſeur 27 puiſſe être contenu plus de 10 fois dans le nombre 347 qu'on diviſe, on ne prendra que 9 pour le quotient, ou pour le nombre des unités de la racine cubique; en ſorte que la racine cubique du plus grand cube contenu dans le nombre propoſé 61723, ſera 39.

La racine cubique 39 qu'on demandoit étant trouvée, il faut chercher le reſte de l'opération; c'eſt-à-dire de combien le nombre propoſé 61723 ſurpaſſe le plus grand cube qu'il renferme, & dont on a tiré la racine cubique 39. Or le moyen le plus ſimple pour faire cette opération eſt de cuber 39; c'eſt-à-dire

de multiplier d'abord 39 par 39 ; ce qui produira le quarré 1521, & de multiplier encore ce quarré 1521 par 39 ; ce qui produira le cube 59319 qu'on écrira au-deſſous du nombre propoſé 61723, & qui étant retranché de ce nombre propoſé, donnera 2404 pour le reſte de l'opération, ou pour la quantité dont le nombre propoſé 61723 ſurpaſſe le cube dont on a extrait la racine cubique 39.

Exemple II.

158 *On demande la racine cubique du plus grand cube contenu dans* 131096.

Nombre propoſé	131 | 096	50	*Racine cubique*
	125	75	*Triple du quarré des dixaines*
Reſte de l'opération	6 | 096		

Ayant retranché par une barre verticale, les trois chiffres 096 de la droite du nombre propoſé ; parce qu'on prévoit qu'il aura deux chiffres à ſa racine cubique, ſavoir un nombre de dixaines & un nombre d'unités ſimples, & tout étant préparé comme dans l'exemple premier ; on remarquera que le nombre propoſé renferme quatre parties dont nous ne conſidérons que les deux premieres, ſavoir.

1°. Le cube du nombre des dixaines de la racine demandée, qui doit avoir trois chiffres à ſa droite, & qui doit par conſéquent être le plus grand cube 125 contenu dans la premiere tranche 131 du nombre propoſé : ainſi la racine cubique 5 de ce plus grand cube, ſera le nombre des dixaines de la racine demandée, & ſera écrit dans le crochet deſtiné à recevoir cette racine.

2°. Le produit fait de 3 fois le quarré du nombre des dixaines de la racine multiplié par le nombre des unités ſimples de cette racine, lequel produit doit avoir deux chiffres à ſa droite, & doit par conſéquent ſe trouver dans le nombre 60 que l'on trouve après avoir retranché de la premiere tranche 131 le plus grand cube 125 qu'il contient, & après avoir abbaiſſé à la droite du reſte de cette ſouſtraction le zéro par lequel la ſeconde tranche commence. Ainſi en diviſant 60 par le triple du quarré des 5 dixaines de la racine, ſavoir par 75. On aura le nombre des unités de la racine qu'on demande.

Mais 60 ne peut pas être diviſé par 75 : ainſi l'on n'aura point d'unités ſimples à joindre aux 5 dixaines qu'on a trouvées pour la racine, & l'on mettra par conſéquent un zéro à la droite du 5 qu'on a écrit à la racine, pour remplir la place des unités, & faire tenir au premier chiffre 5, la place des dixaines.

Les commençans qui ne remarqent pas avec aſſez d'attention que le produit fait de 3 fois le quarré du nombre des dixaines de la racine, multiplié par le nombre des unités ſimples de cette racine, doit néceſſairement avoir deux chiffres à ſa droite; & qui trouvent, comme dans cet exemple que le reſte 60 de la premiere tranche ſuivi du premier chiffre 0 de la ſeconde, ne peut pas être diviſé par le triple du quarré des dixaines, ſavoir par 75; ſont tentés de prendre encore un chiffre de la deuxiéme tranche, & de diviſer 609 par 75. Mais c'eſt une faute qu'on évite aiſément en faiſant attention aux préceptes qu'on a donnés dans ce dernier exemple.

La racine cubique du plus grand cube contenu dans 131096 ſe réduiſant à 5 dixaines ſans unités ſimples; le produit fait de 3 fois le quarré du nombre des dixaines multiplié par celui des unités ſimples, le produit fait de 3 fois le quarré du nombre des unités,

multiplié par celui des dixaines, & le cube des unités, ſeront nuls. Ainſi toute la ſeconde tranche 096 du nombre propoſé, reſtera avec le reſte 6 de la premiere tranche; & ces deux reſtans compoſeront enſemble le reſte de l'opération ou l'excès 6096 dont le nombre propoſé ſurpaſſe le plus grand cube qu'il renferme.

Exemple III.

159 *On demande la racine cubique du plus grand cube contenu dans* 61723537.

Nombre propoſé	61|723|537	395	*Racine cubique*
	27	27	
	34|723	4563	*Triple du quarré de* 39
	29|329		
	2|404|537		
	61|629|875		
Reſte de l'opération	93|662		

Tout étant diſpoſé comme dans l'exemple précédent, & comme on le voit ci-deſſus, on conſidérera ſeulement deux parties dans la racine cubique inconnue qu'on demande; ſavoir un nombre de dixaines qui peut avoir pluſieurs chiffres, & un nombre d'unités qui n'aura jamais qu'un chiffre. En conſéquence de ce partage, le nombre propoſé contiendra le cube du nombre des dixaines de ſa racine cubique; plus trois fois le quarré de ce nombre de dixaines, multiplié par le nombre des unités; plus trois fois le quarré du nombre des unités, multiplié

par le nombre des dixaines ; plus le cube du nombre des unités.

Le cube du nombre des dixaines ayant trois chiffres à ſa droite (*N°.* 156.), ſi l'on ſépare par une barre les trois chiffres 537 de la droite du nombre propoſé ; ce cube ſera dans la partie 61723 ſituée à la gauche de la barre. Ainſi l'on ne pourra connoître le nombre des dixaines, qu'en tirant la racine du plus grand cube contenu dans la partie 61723 du nombre propoſé, comme ſi la partie 537 n'exiſtoit point.

Comme dans l'exemple précédent nous avons trouvé 39 pour la racine cubique du plus grand cube contenu dans 61723, & 2404 pour le reſte ; nous renvoyons à cet exemple pour le détail des opérations qu'il faut faire ; & nous nous contentons de les répéter dans celui-ci en chiffres barrés.

Ayant donc écrit 39 pour le nombre des dixaines de la racine, ou pour la racine du plus grand cube contenu dans la partie 61723, & 2404 étant le reſte de l'opération ; le nombre propoſé 61723|537, diminué par la ſouſtraction du plus grand cube renfermé dans 61723, ſera réduit à 2404|537 qui contiendra encore trois fois le quarré des 39 dixaines, multiplié par le nombre inconnu des unités ; plus trois fois le quarré du nombre des unités multiplié par le nombre des dixaines ; plus le cube du nombre des unités ; mais nous ne ferons uſage que de la premiere de ces trois parties.

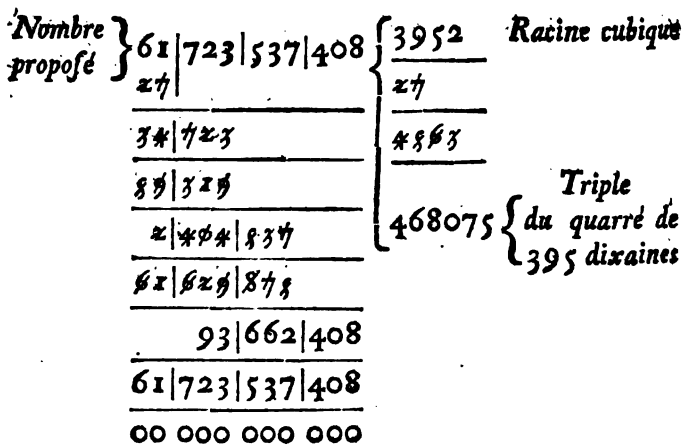
Or 3 fois le quarré des 39 dixaines, multiplié par le nombre des unités, devant avoir deux chiffres à ſa droite, ſera dans la partie 2404|5 qui a deux chiffres à ſa droite. Ainſi diviſant 2404|5 par 3 fois le quarré de 39, c'eſt-à-dire par 4563 ; le quotient 5 que l'on trouvera, ſera le nombre des unités de la ra-

cine. On mettra donc 5 à la droite des 39 dixaines déjà trouvées ; & l'on aura 395 pour la racine cubique demandée du plus grand cube contenu dans le nombre propoſé 61723537.

La racine cubique 395 étant trouvée, on aura le reſte de l'opération, en faiſant le cube de 395, & en retranchant ce cube 61629875, du nombre propoſé 61723537 ; ce qui donnera 93662 pour le reſte, c'eſt-à-dire pour la quantité dont le nombre propoſé 61723537 ſurpaſſe le plus grand cube qu'il renferme.

Exemple IV.

160 *On demande la racine cubique du nombre* 61723537408.



Tout étant préparé comme dans les deux exemples précédens, & conſidérant dans la racine cubique un nombre de dixaines & un nombre d'unités, on trouvera dans le nombre propoſé le cube du nombre des

dixaines de la racine cubique, plus trois fois le quarré des dixaines &c; plus &c (*N°.* 155.).

Le cube du nombre des dixaines devant avoir trois chiffres à ſa droite; ſi l'on ſépare par une barre trois chiffres de la droite du nombre propoſé, ce cube ſera dans la partie 61723537 ſituée à la gauche de la barre, & ſera le plus grand cube contenu dans cette partie. Ainſi l'on ne pourra connoître le nombre des dixaines, qu'en tirant la racine cubique du plus grand cube contenu dans la partie 61723537 du nombre propoſé, comme ſi la partie 408 ſituée à la droite de la barre n'exiſtoit point. Comme nous avons trouvé dans l'exemple précédent que la racine cubique de ce plus grand cube eſt 395, & que le reſte de l'opération eſt 93662; nous écrirons 395 pour le nombre des dixaines de la racine cubique qu'on demande; & nous renvoyons à l'exemple précédent, pour le détail des opérations qu'il faut faire. Nous avons cependant écrit ici en chiffres barrés tous les nombres qui appartiennent aux opérations faites dans les exemples précédens I & III.

Ayant trouvé que 395 eſt le nombre des dixaines de la racine, ou la racine cubique du plus grand cube contenu dans 61723537, & que 93662 eſt le reſte de l'opération; le nombre propoſé ſera réduit à celui-ci 93662408 qui contiendra encore 3 fois le quarré des 395 dixaines qu'on vient de trouver, multiplié par le nombre des unités; plus deux autres parties, qu'il eſt inutile de conſidérer ici.

Or 3 fois le quarré des 395 dixaines multiplié par le nombre des unités, devant avoir deux chiffres à ſa droite, ſera dans 93662|4 qui a deux chiffres à ſa droite. Ainſi en diviſant 93662|4 par 3 fois le quarré de 395, c'eſt-à-dire par 468075; le quotient

2 de la diviſion, ſera le nombre des unités, qui reſtoit à trouver. On écrira donc 2 à la droite des 395 dixaines qui ſont déjà écrites à la racine cubique ; & l'on aura 3952 pour la racine cubique entiere du plus grand cube contenu dans le nombre propoſé 61723537408.

La racine cubique entiere 3952 étant trouvée, on aura le reſte de l'opération, en faiſant le cube de 3952, & en retranchant ce cube du nombre entier propoſé : & comme le cube de 3952 ſera égal au nombre propoſé, il ne reſtera rien. Ainſi le nombre propoſé eſt un cube parfait qui a 3952 pour ſa racine cubique exacte.

REMARQUES.

I.

161 1°. Pour extraire la racine cubique du nombre propoſé 61723537408, nous avons ſéparé par une barre les trois chiffres de la droite de ce nombre, comme ici, 61723537|408 ; & nous avons fait voir que la racine cubique de ce nombre étant partagée en deux parties, l'une compoſée de dixaines, l'autre compoſée d'unités ; il falloit, pour avoir la partie des dixaines, tirer la racine cubique du plus grand cube contenu dans la partie 61723537 ſituée à la gauche de la barre, comme ſi l'autre partie 408 n'exiſtoit point.

2°. Dans le troiſiéme exemple (*N°.* 159.), nous avons tiré la racine cubique du plus grand cube renfermé dans le nombre 61723537 : & pour avoir cette racine, nous avons encore ſéparé trois chiffres

537

537 de la droite du nombre propoſé, comme ici, 61723|537; parce que la racine cubique étant ſuppoſée partagée en deux parties, l'une compoſée de dixaines, l'autre compoſée d'unités; on ne peut avoir le nombre des dixaines, qu'en tirant la racine cubique du plus grand cube contenu dans la partie 61723 ſituée à la gauche de la barre, comme ſi l'autre partie 537 n'exiſtoit point.

3°. Dans le premier exemple (*N°.* 157.), nous avons extrait la racine cubique du plus grand cube contenu dans le nombre 61723: & pour avoir cette racine, nous avons ſéparé les trois chiffres 723 de la droite du nombre 61723, comme ici, 61|723; parce que la racine cubique étant encore ſuppoſée partagée en deux parties, l'une compoſée de dixaines, l'autre compoſée d'unités; on ne peut avoir la partie des dixaines, qu'en tirant la racine cubique du plus grand cube contenu dans la partie 61 ſituée à la gauche de la barre, comme ſi l'autre partie 723 n'exiſtoit point.

Il eſt donc évident, par toutes ces opérations, que pour trouver la racine cubique d'un nombre quelconque tel que 61723537408; il faut ſéparer trois à trois, tous les chiffres de ce nombre, en commençant par ceux de la droite, comme ici, 61|723|537|408; & qu'enſuite il faut procéder à l'opération de l'extraction de la racine cubique qu'on demande, dans l'ordre ſuivant.

1°. Il faut prendre la racine cubique du plus grand cube contenu dans la premiere tranche 61 de la gauche; ce qui ſera toûjours facile, puiſque (*N°.* 149.) cette racine n'aura jamais qu'un ſeul chiffre.

2°. Puis il faudra tirer la racine cubique du plus grand cube contenu dans les deux premieres tranches

61|723 de la gauche, en prenant pour le nombre des dixaines de cette racine, la racine qu'on vient de trouver pour le plus grand cube contenu dans 61.

3°. Enſuite il faut extraire la racine cubique du plus grand cube contenu dans les trois premieres tranches 61|723|537 de la gauche, comme ſi le reſte du nombre propoſé n'exiſtoit point; en prenant pour le nombre des dixaines de cette racine, la racine cubique précédente, qu'on a trouvée pour le plus grand cube renfermé dans 61|723.

4°. Enfin il faut extraire la racine cubique des quatre tranches 61|723|537|408, en prenant pour le nombre des dixaines de cette racine, la racine cubique précédemment trouvée pour les trois tranches 61|723|537.

En procédant de cette maniere à l'extraction des racines cubiques, c'eſt-à-dire en continuant toûjours de prendre la racine cubique précédemment trouvée, pour le nombre des dixaines de la racine cubique d'un nombre qui aura une tranche de plus; on parviendra à tirer la racine cubique d'un nombre compoſé de tant de tranches qu'on voudra.

II.

Lorſqu'on trouve un grand nombre pour l'excès du nombre propoſé ſur le cube dont on a extrait la racine cubique; il eſt bon d'examiner ſi la racine cubique qu'on a trouvée ne pourroit point avoir une unité de plus.

Le moyen le plus ſimple pour faire cette épreuve, eſt d'ajoûter 1 à la racine trouvée, & de cuber cette racine ainſi augmentée de l'unité. Si l'on trouve un nouveau cube plus grand que le nombre propoſé,

ce ſera une marque évidente que la racine cubique trouvée n'eſt pas trop petite.

Par exemple, ayant trouvé 39 pour la racine cubique d'un cube contenu dans 61723, & ayant eu 2404 pour le reſte de l'opération, ce qui eſt un grand nombre; on ajoûtera 1 à la racine 39 : puis on cubera la ſomme 40, en la multipliant par elle-même, & en multipliant encore par 40 le produit 1600; ce qui donnera 64000. Comme ce cube (64000) de 40 eſt plus grand que le nombre propoſé 61723; c'eſt une preuve que 40 ne peut pas être la racine cubique d'un cube contenu dans 61723; & que la racine cubique 39 qu'on a trouvée, n'eſt par conſéquent pas trop petite.

PROBLÊME.

162 *Approcher ſi près qu'on voudra de la racine cubique d'un nombre qui n'eſt pas un cube parfait.*

Nous avons vû (*N°.* 27.) qu'un nombre qui a des parties décimales, étant multiplié par un autre qui a auſſi des parties décimales, il en réſulte un produit qui a autant de figures décimales, qu'il y en a en tout dans les deux facteurs de la multiplication. Ainſi lorſque ce produit ſera encore multiplié par un troiſiéme nombre qui aura des parties décimales; le nouveau produit contiendra autant de figures décimales, qu'il y en aura en tout dans les trois facteurs de la multiplication.

Par exemple, ſi l'on multiplie (4, 254) qui a trois décimales, par (3, 36) qui a deux décimales, le produit (14, 29344) aura cinq figures décimales; & ſi l'on multiplie encore ce produit par (2, 6) qui a une figure décimale; le nouveau produit (37, 162944)

aura ſix figures décimales, c'eſt-à-dire autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les trois facteurs (4, 254), (3, 36), (2, 6).

Donc le cube d'un nombre qui contiendra des dixiémes ou une figure décimale, aura trois figures décimales ; puiſque les trois facteurs de ce cube auront chacun une figure décimale : le cube d'un nombre qui aura deux figures décimales, contiendra ſix chiffres décimaux ; puiſque chaque facteur de ce cube aura deux chiffres décimaux : & en général, le cube d'un nombre quelconque qui aura des chiffres décimaux, contiendra trois fois autant de chiffres décimaux, que ce nombre.

Il ſuit de là que le nombre des figures décimales d'un cube, ne peut être que 3 ou un multiple de 3 ; en ſorte que ſi l'on propoſoit d'extaire la racine cubique d'un nombre qui n'auroit que deux ou quatre ou cinq ou ſept ou huit &c figures décimales; il faudroit mettre à ſa droite un nombre de zéros ſuffiſant, pour lui donner trois ou ſix ou neuf ou douze &c figures décimales.

Enfin il eſt clair que la racine cubique d'un nombre aura autant de figures décimales, qu'il y aura de fois trois figures décimales dans ce nombre.

Cela poſé, lorſqu'un nombre ne ſera pas un cube parfait, on pourra toûjours approcher de ſa racine cubique, de maniere que celle qu'on trouvera ne ſera pas différente de la véritable, d'une quantité égale à un dixiéme ou à un centiéme ou à une quantité décimale de tel ordre qu'on voudra, en cherchant la racine cubique de ce nombre en dixiémes ou en centiémes ou en parties décimales de tel ordre qu'on voudra. Pour cela, on réduira le nombre propoſé en décimales dont la derniere ſoit d'un ordre triple de

celui de la derniere partie décimale qu'on veut avoir à la racine; ce qui ſera toûjours fort aiſé, puiſqu'on n'aura qu'à mettre à la droite du nombre propoſé trois fois autant de zéros qu'on veut avoir de chiffres décimaux à la racine cubique qu'on demande, & ſéparer ces zéros du nombre propoſé par une virgule qui, en faiſant diſtinguer les chiffres de la progreſſion décuple, fera voir en quelle eſpéce de parties décimales le nombre propoſé aura été réduit.

Le nombre propoſé, qui n'eſt point un cube parfait, étant ainſi préparé, on en tirera la racine cubique, comme s'il n'étoit point réduit en décimales; & lorſque la racine du plus grand cube contenu dans ce nombre ſera trouvée, on en ſéparera par une virgule autant de chiffres de la droite, qu'on aura mis de fois trois zéros à la droite de la virgule du nombre propoſé. Par cette opération, l'on aura une racine cubique qui, moyennant ſes parties décimales, approchera autant qu'on voudra de la racine cubique du nombre propoſé.

Exemple.

On propoſe d'approcher de la racine cubique du nombre 12, *d'une quantité plus petite que la milliéme partie d'une unité.*

Puiſqu'on veut approcher de la racine cubique du nombre 12, d'une quantité plus petite que la milliéme partie d'une unité; il faudra que la racine qu'on demande ait des milliémes pour ſes parties décimales de la plus baſſe eſpéce, c'eſt-à-dire qu'elle ait trois figures décimales. Il faudra donc mettre trois fois trois zéros à la droite du nombre 12 propoſé, après lequel

on aura premiérement mis une virgule, comme ici; (12,000000000); ce qui ne changera pas la valeur de 12. Enſuite on tirera la racine cubique du plus grand cube contenu dans ce nombre, comme s'il ne contenoit point de décimales. Lorſqu'on aura trouvé par les méthodes ci-devant expliquées, que cette racine cubique eſt 2289; on en ſéparera trois figures de la droite par une virgule; ce qui donnera (2, 289) pour la racine cubique demandée. Car le nombre (12, 000000000) ayant neuf figures décimales, ſa racine cubique 2289 doit en avoir trois, & ſe réduire à (2, 289) qui ſignifie 2289 milliémes.

Comme on ne pourroit pas ajoûter 1 milliéme au nombre 2289 milliémes, ſans rendre cette racine trop grande; il eſt clair qu'on a approché de la racine cubique de 12, d'une quantité plus petite que la milliéme partie d'une unité.

PROBLÉME.

163 *Trouver la racine cubique d'une fraction.*

On extraira la racine cubique du numérateur, & celle du dénominateur de la fraction propoſée; & la fraction qui aura la premiere racine pour numérateur, & la ſeconde pour dénominateur, ſera la racine cubique de la fraction propoſée.

Car la racine cubique d'une fraction, eſt une quantité qui multipliée par ſon quarré, donne un produit égal à la fraction propoſée. Or une fraction qui a pour numérateur & dénominateur, les racines cubiques du numérateur & du dénominateur de la fraction propoſée, étant multipliée par ſon quarré, donne un produit égal à cette fraction. Donc la fraction

qui a pour numérateur & pour dénominateur les racines cubiques du numérateur & du dénominateur d'une fraction propoſée, eſt la racine cubique de cette fraction propoſée.

Quoique cette regle ſoit générale, il ſeroit difficile d'en faire l'application à tous les cas, ſans faire quelques remarques.

I.

164 Lorſque le numérateur & le dénominateur d'une fraction, ſont des cubes parfaits; on tire exactement les racines cubiques de ſon numérateur & de ſon dénominateur; & par conſéquent l'on trouve exactement la racine cubique de cette fraction.

Par exemple ſi l'on propoſe de tirer la racine cubique de la fraction $\frac{64}{125}$ dont le numérateur & le dénominateur ſont des cubes parfaits qui ont 4 & 5 pour racines cubiques; la fraction $\frac{4}{5}$ ſera ſa racine cubique exacte.

II.

165 Lorſque le numérateur de la fraction propoſée n'eſt pas un nombre cube, & que ſon dénominateur eſt un nombre cube; ſi après avoir tiré la racine du plus grand cube contenu dans le numérateur, & la racine cubique exacte du dénominateur, on fait une fraction qui ait pour numérateur & dénominateur ces deux racines cubiques; cette fraction ne ſera pas la racine exacte de la fraction propoſée; mais la différence ſera moindre qu'une unité fractionnaire de la fraction qu'on prendra pour racine cubique.

Suppoſons qu'on ait à extraire la racine cubique de $\frac{70}{125}$ dont le numérateur ne contient point de

nombre entier cube plus grand que 64 qui a 4 pour racine cubique, & dont le dénominateur eſt un cube parfait qui a 5 pour racine cubique. Si l'on prend $\frac{4}{5}$ pour la racine cubique de la fraction propoſée $\frac{70}{125}$; on n'aura pas exactement la racine cubique de cette fraction; mais l'erreur ſera moindre que $\frac{1}{5}$.

Si l'on veut approcher davantage de la racine cubique d'une fraction dont le dénominateur ſeul eſt un cube parfait; il faudra multiplier le numérateur & le dénominateur de la fraction propoſée, par un cube parfait plus ou moins grand, ſuivant qu'on voudra approcher plus ou moins près de la véritable grandeur de la racine: & comme cette opération ne changera point la valeur de la fraction propoſée, c'eſt-à-dire que la nouvelle fraction ſera égale à la fraction propoſée; on aura la racine cubique de la fraction propoſée avec le degré de préciſion qu'on voudra, en tirant les racines cubiques du numérateur & du dénominateur de cette nouvelle fraction.

Par exemple ſi l'on veut approcher de la racine cubique de la fraction $\frac{70}{125}$, de maniere que l'erreur ſoit moindre que la *centiéme* partie de $\frac{1}{5}$; on multipliera le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{70}{125}$ par le cube de 100, c'eſt-à-dire par 1000000; ce qui donnera cette fraction $\frac{70000000}{125000000}$: & prenant les racines cubiques des deux termes de cette nouvelle fraction, pour en faire une autre fraction, l'on aura $\frac{412}{500}$ qui ne s'éloignera pas de la véritable racine cubique de $\frac{70}{125}$, d'une quantité égale à $\frac{1}{500}$.

III.

166 Si le numérateur & le dénominateur de la fraction propoſée, ne ſont ni l'un ni l'autre des cubes

parfaits, on multipliera les deux termes de la fraction proposée par le quarré de son dénominateur; ce qui convertira cette fraction en une autre fraction qui lui sera égale, & dont le dénominateur sera un cube parfait. Alors on tirera la racine cubique de cette nouvelle fraction, comme il a été dit pour les fractions dont les dénominateurs sont des cubes parfaits.

IV.

167 On peut encore extraire la racine cubique d'une fraction quelconque de la maniere suivante.

On commencera par diviser le numérateur de la fraction par son dénominateur, en cherchant un quotient composé de parties décimales qu'on poussera plus ou moins loin, suivant que l'on voudra extraire plus ou moins exactement la racine cubique de la fraction proposée. Ensuite on extraira la racine cubique de ce quotient; & cette racine sera celle de la fraction proposée, aussi exacte qu'on l'aura demandée.

Par exemple si l'on veut extraire la racine cubique de $\frac{1}{7}$, on cherchera le quotient de $\frac{1}{7}$ en parties décimales; & l'on trouvera (0, 142857 142857 &c.) pour ce quotient dans lequel on aura soin de mettre un nombre de figures décimales multiple de 3. Ensuite on extraira la racine cubique de ce nombre; & l'on trouvera (0, 5227) qui sera, à peu de chose près, la racine cubique de $\frac{1}{2}$.

PROBLÉME.

168 *Trouver la racine cubique d'un nombre complexe composé de toiſes cubiques & de parties de la toiſe cubique diviſée en 6, & ſous-diviſée continuellement en 12, tel que*

$$\begin{array}{l|l}
118^{TTT}\ 5^{TTP}\ 1^{TTp}\ 5^{TTL}\ 6^{TT_1} & \left\{\begin{array}{l} 4^{T}\ 5^{P}\ 6^{p} \\ \hline 48^{TT} \\ \hline 70^{TT}\ 0^{TP}\ 6^{T_P} \end{array}\right. \\
64 & \\
\hline
54 \quad 3\times 9 & \\
\hline
112^{TTT}\ 5^{TTP}\ 5^{TTp}\ 8^{TTL} & \\
\hline
5^{TTT}\ 5^{TTP}\ 7^{TTp}\ 9^{TTL}\ 6^{TT_1} & \\
4\times 7 & \\
\hline
118^{TTT}\ 5^{TTP}\ 1^{TTp}\ 5^{TTL}\ 6^{TT_1} & \\
\hline
0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0 &
\end{array}$$

1°. On commencera par extraire la racine cubique du nombre des toiſes cubes contenues dans le nombre complexe propoſé. Comme cette opération a été ſuffiſamment expliquée, nous ne la détaillerons point; & nous dirons ſeulement que cette racine cubique ſera 4^{T} qu'on écrira au lieu deſtiné pour la racine; & qu'on aura 54^{TTT} pour le reſte des 118^{TTT} ſur leſquelles la premiere opération aura été faite.

2°. Pour trouver le nombre des pieds de la racine, on réduira, pour un moment ſeulement, en toiſe-toiſe-pied les 54^{TTT} qu'on a de reſte, en les multipliant par 6; ce qui produira 324^{TTP} leſquelles avec les 5^{TTP} qui ſe trouvent dans le nombre propoſé, compoſeront 329^{TTP} qu'on écrira pour un moment

ſeulement, & qu'on effacera lorſqu'on n'en aura plus beſoin. Puis on prendra 3 fois le quarré des 4 toiſes qu'on vient de trouver pour la premiere partie de la racine ; & l'on aura 48^{TT} par leſquelles on diviſera les 329^{TTP} qu'on vient de préparer ; ce qui donnera 5^{P} pour le quotient, & pour la ſeconde partie de la racine demandée. Ainſi ayant écrit 5^{P} après les 4^{T} qu'on a trouvées ; on aura $4^{T}\ 5^{P}$ pour les deux premiers termes de la racine cubique demandée. La ſeconde partie de la racine étant ainſi trouvée, on effacera les 329^{TTP} qu'on avoit préparées ; parce que les $54^{TTT}\ 5^{TTP}$ à la place deſquelles on les avoit priſes, ſeront plus commodes pour le reſte de l'opération.

Pour avoir le reſte de cette ſeconde opération, l'on cubera $4^{T}\ 5^{P}$ qu'on a trouvés pour la racine ; c'eſt-à-dire qu'après avoir multiplié $4^{T}\ 5^{P}$ par $4^{T}\ 5^{P}$, l'on multipliera encore le produit quarré $23^{TT}\ 2^{TP}\ 2^{Tp}$ qui en réſultera, par $4^{T}\ 5^{P}$; ce qui produira le cube $112^{TTT}\ 5^{TTP}\ 5^{TTp}\ 8^{TTL}$. Enſuite on retranchera ce cube du nombre complexe propoſé ; & le reſte ſera $5^{TTT}\ 5^{TTP}\ 7^{TTp}\ 9^{TTL}\ 6^{TT'}$.

3°. Pour trouver le nombre des pouces de la racine, on réduira en toiſe-toiſe-pouce les toiſes cubiques & les toiſe-toiſe-pied qu'on a de reſte, en multipliant les 5^{TTT} par 72 & les 5^{TTP} par 12 ; ce qui produira 360^{TTp} & 60^{TTp}, leſquels deux nombres de toiſe-toiſe-pouce étant joints aux 7^{TTp} qu'on a déjà, compoſeront 427^{TTp}. Enſuite on prendra 3 fois le quarré de $4^{T}\ 5^{P}$ qu'on a trouvés pour la racine ; ce qui donnera $70^{TT}\ 0^{TP}\ 6^{Tp}$. Enfin l'on diviſera 427^{TTp} par $70^{TT}\ 0^{TP}\ 6^{Tp}$, ou par ſa premiere partie 70^{TT} ; ce qui donnera 6 pouces pour le quotient, & pour le nombre de-

mandé des pouces de la racine. Ainſi l'on écrira 6 pouces à la droite des $4^T\ 5^P$ qu'on a déjà trouvés; & l'on aura $4^T\ 5^P\ 6^p$ pour la racine cubique du nombre complexe propoſé.

Pour avoir le reſte de cette opération, l'on cubera $4^T\ 5^P\ 6^p$ qu'on a trouvés; c'eſt-à-dire qu'on multipliera $4^T\ 5^P\ 6^p$ par $4^T\ 5^P\ 6^p$; ce qui donnera le produit quarré $24^{TT}\ 1^{TP}\ 0^{Tp}\ 6^{TL}$, & qu'on multipliera encore ce quarré par ſa racine $4^T\ 5^P\ 6^p$; ce qui donnera le cube $118^{TTT}\ 5^{TTP}\ 1^{TTp}\ 5^{TTL}\ 6^{TT1}$. Enſuite on retranchera ce cube du nombre complexe propoſé; & comme il ne reſtera rien, ce ſera une marque que le nombre complexe propoſé eſt un cube parfait, & que ſa racine cubique eſt exactement $4^T\ 5^P\ 6^p$.

ELEMENS D'ARITHMÉTIQUE.

LIVRE VIII.

Des Proportions Arithmétiques, des Progreſſions Arithmétiques, des Progreſſions Géométriques & des Logarithmes.

CHAPITRE PREMIER.

Des Proportions Arithmétiques.

169 NOus avons dit (*N°.* 101.) que dans la comparaiſon de deux grandeurs, telles que 12 & 3 ou 3 & 12, ſi l'on ne conſidére que la quantité 9 dont l'une ſurpaſſe l'autre ou eſt ſurpaſſée par l'autre; cette quantité 9 ſe nomme *Différence*, ou *Rapport arithmétique*, ou *Raiſon arithmétique* des deux grandeurs comparées. Nous avons dit auſſi que celle des deux grandeurs comparées, qu'on nomme ou qu'on écrit la premiere, s'appelle *Antécédent;* & que celle qu'on écrit ou que l'on nomme la ſeconde, s'appelle *Conſéquent.*

Lorſque le premier terme d'un rapport arithmétique, eſt moindre que le ſecond; l'on dit que la *différence* eſt *additive*; parce que pour avoir le ſecond terme du rapport par le moyen du premier, il faut ajoûter au premier la *différence*, c'eſt-à-dire la quantité dont il eſt ſurpaſſé par le ſecond.

Au contraire, lorſque le premier terme d'un rapport arithmétique eſt plus grand que le ſecond, l'on dit que *la différence* eſt *ſouſtractive*; parce que pour avoir le ſecond terme du rapport par le moyen du premier, il faut ſouſtraire du premier terme, la *différence*, c'eſt-à-dire la quantité dont il ſurpaſſe le ſecond.

170 Quatre termes dont le premier eſt ſurpaſſé par le ſecond, de la même quantité dont le troiſiéme eſt ſurpaſſé par le quatriéme, ou dont le premier ſurpaſſe le ſecond, de la même quantité que le troiſiéme ſurpaſſe le quatriéme, ſe nomment enſemble une *Proportion arithmétique*. Par exemple ces quatre termes 3, 12, 5, 14, ou 12, 3, 14, 5, ſont en proportion arithmétique.

Une proportion arithmétique eſt donc compoſée de deux rapports arithmétiques égaux; & les différences égales des termes de ces rapports ſont toutes deux additives, ou toutes deux ſouſtractives.

Lorſqu'on écrit quatre termes d'une proportion arithmétique, on ſépare par un point les deux termes de chaque rapport, & l'on met deux points l'un ſur l'autre après le ſecond terme, pour ſéparer le premier rapport du ſecond. Par exemple pour repréſenter une proportion arithmétique compoſée de ces quatre termes 3, 12, 5, 14, on écrira ces quatre termes de cette maniere 3 . 12 : 5 . 14.

Pour énoncer une proportion arithmétique, telle que celle-ci 3 . 12 : 5 . 14, on dit: 3 *eſt à* 12 *comme*

5 *eſt à* 14. Nous avons vû qu'on peut énoncer de la même maniere une proportion géométrique.

Les quatre termes d'une proportion arithmétique ont les mêmes noms que ceux d'une proportion géométrique.

Le premier terme s'appelle *Antécédent du premier rapport*, ou *Premier Antécédent.*

Le ſecond terme ſe nomme *Conſéquent du premier rapport*, ou *Premier Conſéquent.*

Le troiſiéme terme s'appelle *Antécédent du ſecond rapport*, ou *Second Antécédent.*

Le quatriéme terme ſe nomme *Conſéquent du ſecond rapport*, ou *Second Conſéquent.*

Le premier & le quatriéme termes s'appellent les *Extrêmes*, parce qu'ils ſont aux extrémités de la proportion.

Le ſecond & le troiſiéme termes qui ſont au milieu de la proportion, ſe nomment les *Moyens.*

171 Lorſque les antécédens d'une proportion arithmétique, telle que celle-ci 12 . 3 : 14 . 5, ſeront plus grands que leurs conſéquens; il eſt évident qu'en renverſant l'ordre des termes de la proportion, & en écrivant 5 . 14 : 3 . 12, on aura encore une nouvelle proportion dont les antécédens ſeront moindres que leurs conſéquens, & qui aura les mêmes extrêmes & les mêmes moyens que la premiere.

172 Une proportion arithmétique, comme celle-ci 3 . 7 : 7 . 11 dont les deux termes moyens ſont égaux, s'appelle *Proportion arithmétique continue.* Ordinairement on n'écrit qu'un des deux moyens; enſorte que la proportion continue n'a que trois termes, à la gauche deſquels on met une barre horiſontale entre deux points dont l'un eſt au-deſſus & l'autre au-deſſous, comme ici $\frac{\cdot}{\cdot}$ 3 . 7 . 11.

THÉORÈME.

173 *Dans toute proportion arithmétique, la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens.*

DÉMONSTRATION.

Nous avons vû (*N°.* 171.) qu'une proportion arithmétique dont les antécédens ſont plus grands que leurs conſéquens, peut être réduite à une autre proportion qui a les mêmes extrêmes & les mêmes moyens, & dont les antécédens ſont moindres que leurs conſéquens : en ſorte que ſi l'on prouve que la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens, dans une proportion dont les antécédens ſeront moindres que les conſéquens; la propoſition ſera auſſi démontrée pour les proportions dont les antécédens ſeront plus grands que leurs conſéquens.

Suppoſons donc que les deux antécédens d'une proportion arithmétique ſont ſurpaſſés également par leurs conſéquens. Il eſt évident qu'à la place du ſecond terme, on pourra prendre le premier, plus la différence de ces deux termes ; en ſorte que la ſomme des moyens ; c'eſt-à-dire la ſomme du ſecond terme & du troiſiéme, contiendra le premier terme avec la différence, plus le troiſiéme terme.

Il n'eſt pas moins clair qu'à la place du quatriéme terme, on pourra prendre le troiſiéme avec la différence de ces deux termes, laquelle (*N°.* 170.) eſt la même que celle du premier terme au ſecond; en ſorte que la ſomme des extrêmes ; c'eſt-à-dire la ſomme du premier & du quatriéme termes, contiendra le premier terme, plus le troiſiéme avec la même différence contenue dans la ſomme des moyens.

La

La ſomme des moyens & celle des extrêmes, ſeront donc compoſées des trois mêmes parties, ſavoir du premier terme, du troiſiéme terme & de la différence d'un antécédent à ſon conſéquent : ainſi ces deux ſommes ſeront égales.

Corollaire premier.

174 Si le premier terme d'une proportion arithmétique étoit zéro, la ſomme des extrêmes ſe réduiroit au quatriéme terme de la proportion ; & comme la ſomme des extrêmes ſeroit toûjours égale à la ſomme des moyens, le quatriéme terme ſeroit égal à la ſomme des moyens.

On prouvera de même que ſi le quatriéme terme d'une proportion étoit zéro, le premier terme ſeroit égal à la ſomme des moyens.

Enfin l'on démontrera de la même maniére que ſi l'un des moyens étoit zéro, l'autre moyen ſeroit égal à la ſomme des extrêmes de la proportion.

Corollaire II.

175 Dans une proportion arithmétique continue, telle que celle-ci 3 . 7 : 7 . 11 dont les deux moyens ſont toûjours égaux (*N°.* 172), la ſomme des moyens ſera le double de l'un des moyens : & comme (*N°.* 173.) la ſomme des extrêmes ſera toûjours égale à la ſomme des moyens ; il eſt évident que la ſomme des extrêmes ſera double de l'un des moyens.

Lorſque la proportion arithmétique continue eſt écrite de cette maniére —÷— 3 . 7 . 11, il eſt clair que la ſomme des extrêmes eſt égale au double du terme moyen.

COROLLAIRE III.

176 Puiſque (*N°.* 173.) dans toute proportion arithmétique la ſomme des extrêmes eſt égale à celle des moyens, & qu'il eſt évident qu'en retranchant une même quantité de ces deux ſommes égales, les reſtes ſeront égaux; il ſuit que

1°. Si l'on retranche un extrême, de ces deux ſommes, l'autre extrême qui reſtera d'une part, ſera égal à ce qui reſtera de l'autre part, ſavoir à la ſomme des moyens moins l'extrême retranché. Ainſi l'on aura celui des deux extrêmes qu'on voudra, en ajoûtant enſemble les deux moyens, & en retranchant l'autre extrême de leur ſomme.

2°. Si l'on retranche un moyen, de la ſomme des moyens & de la ſomme des extrêmes qui ſont égales; le moyen qui reſtera d'une part, ſera égal à ce qui reſtera de l'autre part, ſavoir à la ſomme des extrêmes moins le moyen retranché. Ainſi l'on trouvera celui des deux moyens qu'on voudra, en ajoûtant enſemble les extrêmes, & en retranchant l'autre moyen de leur ſomme.

Par exemple ſi une proportion arithmetique commence par ces trois termes 12 . 3 : 14 . *, & qu'on veuille avoir le quatriéme qui eſt le ſecond extrême; on ajoûtera enſemble les deux moyens 3 & 14; & de leur ſomme 17 ayant retranché le premier terme 12, la quantité 5 qui reſtera, ſera le quatriéme terme demandé: en ſorte que la proportion entiere ſera 12 . 3 : 14 . 5.

Si une proportion avoit pour ſes trois derniers termes * . 3 : 14 . 5, & qu'on voulût avoir le premier, il faudroit encore additionner les deux moyens 3 & 14: puis de leur ſomme 17 retrancher le ſecond extrême 5; & le reſte 12 ſeroit le premier terme demandé:

en ſorte que la proportion entiere ſeroit 12. 3 : 14. 5.

Si le ſecond terme manquoit dans une proportion arithmétique, & qu'on n'en eut que ces trois termes 12. * : 14. 5; on trouveroit le ſecond terme, en ajoûtant enſemble les deux extrêmes 12. & 5, & en retranchant de leur ſomme 17 le moyen 14 que l'on a; ce qui donneroit 3 pour le ſecond terme qui manque: en ſorte que la proportion entiere, ſeroit 12. 3 : 14. 5.

Enfin ſi le troiſiéme terme manquoit dans une proportion arithmétique, & que l'on n'en connût que ces trois termes 12. 3 : *. 5; on trouveroit le troiſiéme terme qui manque, en ajoûtant enſemble les deux extrêmes 12 & 5, & en retranchant de leur ſomme 17 le premier moyen 3 que l'on a; ce qui donneroit 14 pour le ſecond moyen demandé: & la proportion entiere ſeroit 12. 3 : 14. 5.

CHAPITRE II.

Des Progreſſions Arithmétiques.

DÉFINITIONS.

177 UNE ſuite de termes qui croiſſent ou qui décroiſſent tous également, s'appelle une *Progreſſion arithmétique.*

Si tous les termes de la progreſſion arithmétique vont en augmentant, on la nomme *Progreſſion arithmétique croiſſante*; & ſi tous les termes vont en diminuant, on l'appelle *Progreſſion arithmétique décroiſſante.* Par exemple, cette ſuite 5, 7, 9, 11, 13 &c, eſt une progreſſion arithmétique croiſſante; & cette autre ſuite 13, 11, 9, 7, 5, 3 &c, eſt une progreſſion arithmétique décroiſſante.

Pour marquer que tous les termes d'une ſuite, telle que celle-ci 3, 5, 7, 9, 11, 13 &c, ſont en progreſſion arithmétique ; on place à la gauche du premier terme, deux points l'un ſur l'autre avec une barre horiſontale entre deux, & l'on met un point après chaque terme de la progreſſion, comme ici ÷3. 5. 7. 9. 11. 13 &c.

La quantité conſtante dont les termes d'une progreſſion arithmétique croiſſent ou décroiſſent, s'appelle *Raiſon* ou *Différence* de la progreſſion ; & cette *différence* qui eſt la même entre tous les termes conſécutifs, eſt *additive* ou *ſouſtractive*, ſuivant que les termes de la progreſſion vont en augmentant ou en diminuant.

Le premier & le dernier termes d'une progreſſion arithmétique, ſe nomment les *Extrêmes* de la progreſſion ; & tous les autres termes s'appellent les *Moyens*.

COROLLAIRE PREMIER.

178 Puiſque (*N°*. 177.) les termes d'une progreſſion arithmétique croiſſent ou décroiſſent tous, d'une quantité conſtante égale à la *différence* de la progreſſion ; il eſt évident qu'on peut repréſenter tous les termes d'une progreſſion arithmétique, en employant ſeulement le premier avec la *différence* conſtante de la progreſſion ; & que chaque terme contiendra le premier, plus ou moins la *différence* multipliée par le nombre des termes qui ſeront avant lui.

Le premier terme qui n'a rien avant lui, ſe contiendra lui-même ſans addition ni ſouſtraction de la *différence*.

Le ſecond terme qui a un terme avant lui, & qui doit être plus grand ou plus petit d'une *différence* que le précédent, contiendra le premier terme une fois, plus ou moins la *différence* une fois.

Le troiſiéme terme qui a deux termes avant lui, & qui doit être plus grand ou plus petit d'une *différence* que le ſecond, contiendra le premier terme, plus ou moins la *différence* deux fois.

Le quatriéme terme qui a trois termes avant lui, & qui doit être plus grand ou plus petit que le troiſiéme d'une *différence*, contiendra le premier terme, plus ou moins la *différence* trois fois.

Enfin chaque terme augmentant ou diminuant toûjours d'une *différence*, contiendra le premier terme, plus ou moins autant de *différences* qu'il aura de termes avant lui. Par exemple le centiéme terme qui a 99 termes avant lui, contiendra le premier terme, plus ou moins 99 fois la *différence* de la progreſſion.

Ainſi connoiſſant le premier terme & la *différence conſtante* de la progreſſion; l'on déterminera quel terme on voudra de cette progreſſion, en multipliant la *différence* par le nombre des termes qui précédent celui qu'on veut avoir, & en ajoûtant ce produit au premier terme, ſi la progreſſion eſt croiſſante, ou en retranchant ce produit du premier terme, ſi la progreſſion eſt décroiſſante.

COROLLAIRE II.

179 Puiſque (*N°.* 178.) chaque terme d'une progreſſion arithmétique contient le premier, plus ou moins la *différence* propre de la progreſſion, multipliée par le nombre des termes qui ſont avant lui; il eſt évident que chaque terme différera du premier, d'une quantité égale à la *différence* propre de la progreſſion, multipliée par le nombre des termes qui ſeront avant lui. Par exemple le ſecond terme différera du premier, d'une quantité égale à la ſimple *différence*

de la progreſſion ; le troiſiéme ſera différent du premier, d'une quantité égale à deux fois la *différence* de la progreſſion ; ..... le centiéme différera du premier, d'une quantité égale à 99 fois la *différence* propre de la progreſſion : & ainſi des autres.

De même que nous avons comparé chaque terme d'une progreſſion arithmétique avec le premier, on pourra comparer chaque terme avec tout autre terme que le premier ; & l'on verra clairement que deux termes qui ſe ſuivront immédiatement, auront pour différence, la *différence* propre de la progreſſion ; que deux termes qui auront un terme entr'eux, auront pour différence deux fois celle de la progreſſion ; que deux termes qui en auront deux autres entr'eux, auront une différence égale à trois fois celle de la progreſſion ; enfin que deux termes qui auront un nombre quelconque d'autres termes entr'eux, auront pour différence celle de la progreſſion, multipliée par un nombre plus grand d'une unité, que celui des termes qui ſeront entre les deux termes comparés.

Corollaire III.

180 Il ſuit de-là que les termes d'une même progreſſion arithmétique, ont entr'eux la même différence, lorſqu'ils ont entr'eux le même nombre de termes : car alors les différences de ces termes ſont compoſées de la même *différence* propre de la progreſſion, multipliée par le même nombre.

Corollaire IV.

181 Donc ſi l'on prend dans une progreſſion arithmétique quatre termes tels, qu'il y ait autant de termes entre le premier & le ſecond, qu'entre le troi-

ſiéme & le quatriéme; ces quatre termes ſeront en proportion arithmétique; puiſque (*N°.* 180.) la différence du premier de ces quatre termes au ſecond, ſera égale à la différence du troiſiéme au quatriéme.

REMARQUE.

182 L'uſage que nous ferons des progreſſions arithmétiques, pour expliquer la nature des Logarithmes dont nous parlerons dans le Chapitre quatriéme, nous oblige de faire remarquer qu'une même progreſſion arithmétique peut avoir pour termes des nombres vrais, & des nombres faux. On en verra des exemples, après qu'on aura expliqué ce qu'on entend par nombres vrais & par nombres faux.

On appelle *Nombres vrais* ou *Nombre poſitifs*, tous ceux qui ſont plus grands que zéro; & l'on nomme *Nombres faux* ou *Nombres négatifs*, tous ceux qui ſont moindres que zéro.

Comme zéro n'eſt rien, & qu'on a de la peine à ſe repréſenter quelque choſe moindre que rien; la plûpart de ceux qui entendent parler pour la premiere fois de nombres faux, de nombres moindres que zéro, ou que rien, ne manquent guère de les confondre avec zéro ou rien: mais il eſt aiſé de faire voir que ces nombres ſont très-différens de zéro.

On aura une idée juſte des nombres vrais & des nombres faux, & de la différence des nombres faux à zéro, en ſe repréſentant les premiers comme de vrais biens, & les derniers comme des dettes.

Si un homme poſſéde 100#, & qu'il ait en même-temps une dette de 100#, cet homme ſera dans le même état que s'il ne poſſédoit rien, & qu'il n'eût rien a payer; parce que les 100# qu'il poſſéde ſeront anéanties pour lui, par la dette de 100# qu'il doit payer.

Ainſi l'on pourra dire que l'état de cet homme eſt préciſément zéro.

Si un homme ne poſſéde rien, & qu'il ait une dette de 100#; on ne pourra pas dire que l'état de cet homme eſt préciſément zéro; parce qu'il faut qu'il gagne 100# pour payer ce qu'il doit, & pour être dans l'état d'un autre qui n'a préciſément rien. Il faudra donc convenir que l'état de cet homme eſt de 100# moindre que zéro ou que rien.

Les nombres faux ſont le contraire des nombres vrais, comme les dettes le ſont des biens vrais: & de même que les dettes anéantiſſent pour celui qui les a, autant de bien qu'il en faut pour les payer; de même auſſi, ſi l'on met des nombres faux avec des nombres vrais, on détruira dans les derniers autant d'unités que les premiers en contiendront. Et réciproquement, comme des biens vrais détruiſent des dettes, parce qu'ils peuvent les payer; en mettant des nombres vrais avec des nombres faux, on détruira dans ceux-ci autant d'unités qu'il y en aura dans les premiers.

Pour diſtinguer les nombres vrais d'avec les nombres faux, on met au-devant des derniers cette petite barre horiſontale — qu'on appelle *Moins*.

Par exemple -1, -2, -3, -4, &c repréſentent des nombres faux ou négatifs, c'eſt-à-dire des nombres moindres que zéro, de 1, 2, 3, 4, &c unités: au lieu que 1, 2, 3, 4, &c repréſentent des nombres poſitifs ou vrais, c'eſt-à-dire des nombres plus grands que zéro de 1, 2, 3, 4, &c unités. Ainſi pour repréſenter au juſte l'état d'un homme qui poſſéderoit 100#, & qui auroit une dette de 40#, on écriroit 100# —40#; ce qu'on pourroit abréger, en écrivant ſimplement 60# qui reſtent de 100# après avoir payé la dette de 40#; mais en écrivant 60#, l'état de cet homme ne ſeroit pas auſſi-bien détaillé qu'en écrivant 100# —40#.

La barre horiſontale — par laquelle on marque qu'un nombre eſt faux, ou moindre que zéro d'une quantité égale à ce nombre, étant appellée *Moins*, les quantités fauſſes -1, -2, 3, -4, &c ſeront nommées *moins* 1, *moins* 2, *moins* 3, *moins* 4 &c; & les quantités mélées, 100 —40, 100 —60, qui peuvent repréſenter un vrai bien de 100 avec une dette de 40 ou de 60, ſeront nommées 100 *moins* 40, & 100 *moins* 60: en ſorte que pour repréſenter l'état d'un homme qui poſſéderoit 100#, & qui auroit une dette de 40# ou de 60#; on pourroit dire que ſon état eſt 100# *moins* 40#, ou 100# *moins* 60#.

La barre horiſontale — ſignifiant proprement *Moins*, elle eſt la marque d'une ſouſtraction & ſignifie que la grandeur qui la ſuit, doit être retranchée de celle qui la précéde. Par exemple 100 —40 ſignifie qu'il faut retrancher 40 de 100; ce qui réduit 100—40 à 60.

Lorſqu'un nombre poſitif qu'il faut retrancher, eſt moindre qu'un autre nombre poſitif dont on doit le retrancher, il eſt évident que le reſte de la ſouſtraction eſt toûjours poſitif. Par exemple 100—40 qui ſignifie qu'on retranche le nombre vrai 40 du nombre vrai 100, ſe réduit au nombre vrai 60.

Mais lorſqu'un nombre vrai qu'il faut retrancher, eſt plus grand que le nombre vrai dont il faut le retrancher, & qu'il n'y a pas d'autre nombre ſur lequel on puiſſe emprunter; le reſte de la ſouſtraction eſt toûjours un nombre faux égal, pour le nombre de ſes unités, à la différence des deux nombres. Par exemple ſi l'on doit retrancher 100 de 40, ce qu'on écrit ainſi 40—100; le reſte de la ſouſtraction ſera le nombre faux —60; parce que le nombre 100 qu'il faut retrancher eſt compoſé de 40 & de 60, & qu'après avoir retranché 40 de 40, ce qui donne un reſte égal

COROLLAIRE.

184 Si le nombre des termes de la progreſſion eſt impair, le terme du milieu ſera égal à la moitié de la ſomme des extrêmes. Car comme il y aura même différence du premier terme à celui du milieu, que de celui du milieu au dernier; il eſt clair que le premier terme, celui du milieu & le dernier ſeront en proportion continue. Ainſi la ſomme des extrêmes ſera double du terme du milieu (*N°.* 175.); & par conſéquent le terme du milieu ne vaudra que la moitié de la ſomme des extrêmes.

THÉORÈME.

185 *La ſomme de tous les termes d'une progreſſion arithmétique, eſt égale à la moitié de la ſomme des extrêmes, multipliée par le nombre des termes de la progreſſion.*

DÉMONSTRATION.

Nous avons vû (*N°.* 183.) que la ſomme des extrêmes, eſt égale à la ſomme de deux termes moyens quelconques également éloignés des extrêmes; & nous avons prouvé (*N°.* 184.) que quand le nombre des termes de la progreſſion eſt impair, le terme du milieu eſt égal à la moitié de la ſomme des extrêmes. Ainſi tous les termes d'une progreſſion arithmétique, ſont enſemble égaux à un pareil nombre de termes dont chacun ſeroit égal à la moitié de la ſomme des extrêmes; d'où il ſuit qu'on aura la ſomme de tous les termes d'une progreſſion arithmétique, en prenant la moitié de la ſomme des extrêmes, autant de fois qu'il y a de termes dans la progreſſion, c'eſt-à-dire en multipliant la moitié de la ſomme des extrêmes, par le nombre des termes de la progreſſion.

Par exemple ſi l'on a cette progreſſion arithmétique ÷ 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. dont la ſomme des extrêmes 3 & 15 eſt 18, & dont le nombre des termes eſt 7; on multipliera 9 qui eſt la moitié de 18 par 7; ce qui donnera 63 pour la ſomme de tous les termes de la progreſſion propoſée.

COROLLAIRE.

186 Donc on aura auſſi la ſomme de tous les termes d'une progreſſion arithmétique, en multipliant la ſomme des extrêmes par la moitié du nombre des termes de cette progreſſion.

Par exemple ſi l'on a cette progreſſion arithmétique ÷ 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. dont la ſomme des extrêmes eſt 18, & dont le nombre des termes eſt 7; on multipliera 18 par $3\frac{1}{2}$ qui eſt la moitié de 7; & l'on aura 63 pour la ſomme de tous les termes de la progreſſion propoſée.

Pour mieux faire entendre les principes des progreſſions arithmétiques que l'on vient d'expliquer, on en va faire uſage dans la réſolution de quelques queſtions.

QUESTION PREMIERE.

On a payé une certaine ſomme en 28 ſemaines. Au bout de la premiere ſemaine on a payé 1#; *au bout de la ſeconde on a payé* 4#: *& les payemens ſuivans ayant toujours été ainſi augmentés de* 3#; *on demande de combien a été le payement de la vingt-huitiéme ſemaine.*

Puiſque les payemens ont toûjours été augmentés de 3#; les 28 payemens font une progreſſion arithmétique croiſſante de 28 termes dont le premier eſt 1#, & dont la différence additive eſt 3#. Ainſi (*N*o. 178.) en multipliant la différence 3# par 27 nombre des termes qui précédent le dernier, & en ajoûtant le produit 81# au premier terme 1#; on aura 82# pour le

dernier payement qu'on a fait au bout de la vingt-huitiéme ſemaine.

QUESTION II.

On a payé une certaine ſomme en 28 ſemaines. Au bout de la vingt-huitiéme ſemaine, on a payé 82#; la ſemaine précédente on avoit payé 3# de moins; & toutes les autres ſemaines on avoit toûjours payé 3# de moins. On demande combien l'on a payé la premiere ſemaine.

Il eſt clair que tous les payemens, à commencer par le dernier 82#, pris dans un ordre oppoſé à celui dans lequel ils ont été faits, compoſent une progreſſion arithmétique décroiſſante de 28 termes dont le premier eſt 82#, & dont la différence ſouſtractive eſt 3#. Ainſi (*N°.* 178.) en multipliant la différence 3# par le nombre 27 des termes qui précédent le dernier; & retranchant le produit 81#, du plus grand terme 82#; le reſte 1# ſera le premier payement que l'on demande.

QUESTION III.

On a fait différens payemens qui ont toûjours augmenté de 3#. Le premier a été de 1#, & le dernier a été de 82#. On demande combien l'on a fait de payemens.

Les payemens ayant toûjours été augmentés également de 3#, font une progreſſion arithmétique croiſſante dont le premier terme eſt 1#, le dernier 82#, & la différence 3#.

Or (*N°.* 179.) le dernier terme 82# doit ſurpaſſer le premier 1#, d'une quantité égale à la différence 3# multipliée par le nombre des termes qui ſont avant le dernier. Ainſi retranchant le premier terme 1# du dernier 82#, le reſte 81# ſera égal à la différence 3# de la progreſſion multipliée par le nombre des termes qui précédent le dernier. D'où il ſuit que, ſi l'on diviſe

81# par 3#, le quotient 27 ſera le nombre des termes qui ſont avant le dernier de la progreſſion ; & par conſéquent la progreſſion aura 28 termes, c'eſt-à-dire qu'on a fait 28 payemens.

QUESTION IV.

On a fait 28 payemens qui ont toûjours été augmentés en progreſſion arithmétique. Le premier payement a été de 1#, & le vingt-huitiéme a été de 82#. On demande de combien ces payemens ont toûjours été augmentés.

Le premier payement ayant été de 1#, & le dernier de 82#; la différence de ces payemens extrêmes a été de 81#. Mais (*N°.* 179.) cette différence 81# doit contenir la différence propre de la progreſſion, autant de fois qu'il y a de termes avant le dernier (qui eſt ici le vingt-huitiéme); c'eſt-à-dire qu'elle doit contenir 27 fois la différence propre de la progreſſion. Donc en diviſant 81# par 27, le quotient 3# ſera la différence propre de la progreſſion, ou la quantité dont les payemens ont toûjours été augmentés.

QUESTION V.

Un monceau de terre étant à 5 toiſes du premier d'une file de 100 arbres éloignés les uns des autres de 3 toiſes : l'on a mené une brouettée de terre du monceau au pied de chaque arbre, & l'on a ramené la brouette au monceau. On demande combien de chemin le brouetteur a fait.

Le monceau de terre étant à 5 toiſes du premier arbre de la file, le brouetteur a fait 5 toiſes de chemin pour y mener ſa brouette, & il a fait 5 autres toiſes pour ramener ſa brouette au monceau. Ainſi il a fait 10 toiſes de chemin pour le premier arbre.

Le ſecond arbre étant de 3 toiſes plus éloigné du

monceau que le premier ; le brouetteur a fait trois toiſes de plus pour y conduire ſa brouette, & trois toiſes de plus pour la reconduire au monceau. Ainſi le brouetteur a fait ſix toiſes de plus pour le ſecond arbre que pour le premier.

Par la même raiſon, le brouetteur a fait 6 toiſes de plus pour le troiſiéme arbre que pour le ſecond ; & il a fait continuellement 6 toiſes de plus pour chaque arbre, à meſure qu'il a été plus éloigné du monceau où il a pris la terre. Ainſi les 100 chemins que le brouetteur a faits en allant & en revenant, pour les 100 arbres, font une progreſſion arithmétique croiſſante de 100 termes dont le premier eſt 10 toiſes, & dont la différence propre eſt 6 toiſes.

Donc (*N°.* 178.) en multipliant la différence 6 toiſes, par le nombre 99 des termes qui précédent le centiéme, & ajoûtant le produit 594 toiſes au premier terme 10 toiſes ; la ſomme 604 toiſes ſera le centiéme terme de la progreſſion, ou le chemin que le brouetteur a fait pour mener ſa brouette au centiéme arbre & pour la reconduire au monceau.

Les deux extrêmes de la progreſſion étant 10 toiſes & 604 toiſes ; ſi l'on multiplie leur ſomme 614 toiſes, par la moitié 50 du nombre des termes, le produit 30700 toiſes ſera (*N°.* 186.) la ſomme de tous les termes de la progreſſion ; c'eſt-à-dire la ſomme des chemins que le brouetteur a faits.

QUESTION VI.

On doit remettre 1162^{tt} *en pluſieurs payemens qui doivent augmenter en progreſſion arithmétique. Le premier payement doit être de* 1^{tt} *& le dernier de* 82^{tt}. *On demande combien on fera de payemens.*

Le premier terme de la progreſſion étant 1^{tt}, & le dernier

dernier étant 82#, on aura 83# pour la ſomme des extrêmes.

Mais 1162# étant la ſomme de tous les termes de la progreſſion, eſt égale (*N°.* 186.) à la moitié du nombre des termes, multipliée par la ſomme 83# des extrêmes.

Donc en diviſant 1162# par 83#, le quotient 14 ſera la moitié du nombre des termes. Ainſi la progreſſion aura 28 termes, c'eſt-à-dire qu'on fera 28 payemens.

QUESTION VII.

On a remis 1162# *en pluſieurs payemens qui ont augmenté en progreſſion arithmétique. Le premier payement a été de* 1# *& le dernier de* 82#. *On demande de combien les payemens ont augmenté, c'eſt-à-dire qu'on demande la différence propre de la progreſſion.*

On cherchera d'abord le nombre des termes de la progreſſion, comme dans la queſtion précédente; & l'on trouvera qu'il faut faire 28 payemens: & comme on ſait que le premier payement eſt de 1# & que le dernier eſt de 82#, on trouvera de combien les payemens ont augmenté, comme dans la quatriéme queſtion.

QUESTION VIII.

On a payé 1162# *en* 28 *payemens qui ont augmenté en progreſſion arithmétique, & dont le premier a été de* 1#. *On demande de combien a été le dernier payement, & de combien les payemens ont augmenté.*

Puiſque 1162# eſt la ſomme de 28 payemens, ou de tous les termes de la progreſſion; cette ſomme totale doit contenir la ſomme des extrêmes 14 fois, c'eſt-à-dire autant de fois qu'il y a d'unités dans la moitié du nombre 28 des termes (*N°.* 186.). Ainſi en

diviſant 1162# par 14, le quotient 83# ſera la ſomme des extrêmes de la progreſſion : & comme on ſait que le premier terme eſt 1#, le dernier terme ſera 82#; c'eſt-à-dire qu'on a donné 82# au dernier payement.

Puiſque l'on ſait qu'on a fait 28 payemens en progreſſion arithmétique, que le premier payement a été de 1# & le dernier de 82#; on trouvera comme dans la quatriéme queſtion, que les payemens ont augmenté continuellement de 3#.

QUESTION IX.

On a acquitté une dette de 1162# *en* 28 *payemens qui ont augmenté continuellement de* 3#; *& l'on demande de combien ont été le premier & le dernier payemens.*

On a vû (*N°.* 186) que la ſomme 1162# de tous les termes de la progreſſion, contient la ſomme des extrêmes autant de fois qu'il y a d'unités dans la moitié du nombre des termes. Ainſi cette ſomme totale 1162# contiendra 14 fois la ſomme des extrêmes; d'où il ſuit qu'en diviſant 1162# par 14, le quotient 83# ſera la ſomme des extrêmes.

Puiſqu'il y a 28 termes dans la progreſſion, & que la différence eſt 3#, le dernier terme contiendra 27 fois 3#, c'eſt-à-dire 81#, plus le premier terme : ainſi la ſomme des extrêmes contiendra 81#, plus deux fois le premier terme. Mais nous avons trouvé que la ſomme des extrêmes eſt 83#. Donc en retranchant 81# de 83#, le reſte 2# ſera le double du premier terme; & par conſéquent ce premier terme ſera 1#: & comme le dernier terme doit contenir le premier 1# avec 81#, le dernier terme ſera 82#.

Le premier & le dernier payemens ſeront donc de 1# & de 82#.

CHAPITRE III.

Des Progreſſions géométriques.

DÉFINITIONS.

187 UNE ſuite de termes dont chacun contient également celui qui le ſuit, ou dont chacun eſt également contenu dans le ſuivant, s'appelle *Progreſſion géométrique*, ou ſimplement *Progreſſion.*

Lorſque les termes d'une progreſſion géométrique vont en augmentant, on la nomme *Progreſſion croiſſante ;* & lorſque ſes termes vont en diminuant, on l'appelle *Progreſſion décroiſſante.*

Le nombre entier ou rompu qui exprime combien de fois chaque terme d'une progreſſion contient celui qui le ſuit, ou celui qui le précéde, ſe nomme *Raiſon* de la progreſſion.

Pour marquer que tous les termes d'une ſuite ſont en progreſſion géométrique, on met à la gauche du premier terme quatre points, avec une barre horiſontale qui ſépare les deux points ſupérieurs des deux points inférieurs, & l'on met deux points l'un ſur l'autre après chaque terme de la progreſſion.

Par exemple $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96, dont les termes vont en augmentant, eſt une progreſſion géométrique croiſſante dont la raiſon eſt 2 ; parce que chaque terme eſt contenu deux fois dans celui qui le ſuit. Cette autre ſuite $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 96 : 48 : 24 : 12 : 6 : 3, dont les termes vont en diminuant, eſt une progreſſion géométrique décroiſſante dont la raiſon eſt 2 ; parce que chaque terme contient deux fois celui qui le ſuit.

Une progreſſion géométrique qui n'a que trois termes, comme $\div\!\!\cdot\!\!\cdot\ 3 : 6 : 12$; ou $\div\!\!\cdot\!\!\cdot\ 12 : 6 : 3$, s'appelle une *Proportion géométrique continue.* Ainſi dans une proportion géométrique continue, le premier terme eſt contenu dans le ſecond, ou contient le ſecond, de la même maniere que le ſecond eſt contenu dans le troiſiéme, ou contient le troiſiéme : & par conſéquent, ſi l'on écrit deux fois le terme du milieu, les proportions continues $\div\!\!\cdot\!\!\cdot\ 3 : 6 : 12$ & $\div\!\!\cdot\!\!\cdot\ 12 : 6 : 3$ ſeront converties en ces ſimples proportions $3 : 6 :: 6 : 12$, & $12 : 6 :: 6 : 3$.

COROLLAIRE PREMIER.

188 Donc 1°. Si un nombre quelconque eſt continuellement multiplié par un même nombre plus grand que l'unité ; les termes qui réſulteront de ces multiplications, formeront une progreſſion géométrique croiſſante. Car chaque terme ſera contenu également dans celui qui le ſuivra, & il y ſera contenu plus d'une fois.

Ainſi la ſuite $3 : 3\times2 : 3\times2\times2 : 3\times2\times2\times2 : 3\times2\times2\times2\times2$: &c réſultante du nombre 3 multiplié continuellement par 2, eſt une progreſſion géométrique croiſſante.

La ſuite $2 : 2\times\frac{3}{2} : 2\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2} : 2\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}$: &c réſultante du nombre 2 multiplié continuellement par $\frac{3}{2}$ plus grand que l'unité, eſt auſſi une progreſſion géométrique croiſſante.

2°. Au contraire lorſqu'un nombre quelconque conſideré comme premier terme, ſera continuellement multiplié par une même fraction moindre que l'unité ; les termes qui réſulteront de ces multiplications, compoſeront une progreſſion géométrique décroiſſante qui ſera la même que celle qu'on auroit

en diviſant continuellement le premier terme par la fraction inverſe qui ſera plus grande que l'unité.

Par exemple la ſuite $48 : 48\times\frac{1}{2} : 48\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} : 48\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$: &c qu'on trouve en multipliant le premier terme 48 continuellement par la fraction $\frac{1}{2}$ moindre que l'unité, eſt une progreſſion géométrique décroiſſante qui eſt la même que celle-ci $48 : \frac{48}{2} : \frac{48}{2\times 2} : \frac{48}{2\times 2\times 2}$: &c qu'on auroit en diviſant 48 continuellement par $\frac{2}{1}$ ou par 2. Car multiplier par $\frac{1}{2}$ eſt la même choſe que diviſer par 2.

Cette ſuite $1 : \frac{2}{3} : \frac{2}{3}\times\frac{2}{3} : \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} : \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$: &c ou $1 : \frac{2}{3} : \frac{4}{9} : \frac{8}{27} : \frac{16}{81}$: &c réſultante de l'unité multipliée continuellement par la fraction $\frac{2}{3}$ moindre que l'unité, eſt une progreſſion géométrique décroiſſante qui eſt la même que celle-ci $1 : \frac{1}{\frac{3}{2}} : \frac{1}{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}} : \frac{1}{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}} : \frac{1}{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}$: &c qu'on auroit en diviſant l'unité, continuellement par $\frac{3}{2}$ qui eſt la fraction inverſe de $\frac{2}{3}$. Car (N°. 72.), diviſer par $\frac{3}{2}$ eſt la même choſe que multiplier par la fraction inverſe $\frac{2}{3}$.

Quoique tous les termes d'une progreſſion géométrique croiſſante ou décroiſſante, puiſſent être produits par la multiplication continuelle de ſon premier terme par un même nombre plus grand ou plus petit que l'unité; & que le nombre conſtant par lequel on multipliera continuellement, ſoit propre à exprimer comment chaque terme ſera contenu dans le ſuivant, & puiſſe être par conſéquent regardé comme la raiſon de la progreſſion : ce multiplicateur continuel ne ſera pris, dans le reſte de ce chapitre, pour la raiſon de la progreſſion, que dans le cas où il ſera plus grand que l'unité, & que la progreſſion ſera par conſéquent croiſſante. Et dans le cas où ce multiplicateur continuel ſera une fraction moindre que l'unité, c'eſt-à-dire que la progreſſion ſera décroiſſante ; on prendra pour raiſon de la progreſſion, la fraction inverſe qui

ſera toûjours plus grande que l'unité; & l'on conſidérera les termes de la progreſſion comme s'ils étoient compoſés du premier terme diviſé continuellement par cette fraction inverſe.

COROLLAIRE II.

189 Si deux termes de ſuite quelconques d'une progreſſion, ſont donnés; on pourra continuer cette progreſſion autant qu'on voudra, ſoit en montant ſoit en deſcendant. Car en diviſant le plus grand des deux termes qui ſe ſuivent, par le plus petit, le quotient qui ſurpaſſera l'unité, ſera le nombre de fois que l'un contiendra l'autre; & ce nombre de fois ſera la raiſon de la progreſſion (*N°.* 187. & 188.). Ainſi (*N°.* 188.) en multipliant continuellement par ce quotient, le plus grand des deux termes donnés, on trouvera de ſuite tant de termes qu'on voudra de la progreſſion en montant; & en diviſant continuellement par ce quotient, le plus petit des deux termes donnés, on trouvera autant de termes qu'on voudra de la progreſſion en deſcendant.

COROLLAIRE III.

190 Donc un terme quelconque d'une progreſſion géométrique, eſt compoſé du premier terme multiplié ou diviſé autant de fois de ſuite par la raiſon de la progreſſion, qu'il y a de termes avant lui.

Par exemple le premier terme qui n'en a point d'autre avant lui, eſt compoſé de lui-même, ſans être multiplié ni diviſé par la raiſon de la progreſſion; le ſecond terme qui a un terme avant lui, eſt compoſé du premier multiplié ou diviſé une fois par la raiſon de la progreſſion (*N°.* 188.); le troiſiéme terme qui en a deux avant lui, eſt compoſé du premier multi-

plié ou diviſé deux fois de ſuite par la raiſon de la progreſſion : & ainſi des autres.

COROLLAIRE IV.

191 De même que l'on a comparé tous les termes d'une progreſſion géométrique, avec le premier ; on pourra les comparer avec tel autre terme qu'on voudra de la même progreſſion ; & l'on verra aiſément que,

1°. Quand deux termes ſe ſuivront immédiatement, ou n'auront point d'autres termes entr'eux ; le ſecond de ces deux termes ſera compoſé du premier multiplié ou diviſé une fois par la raiſon de la progreſſion.

2°. Lorſque deux termes auront un terme entr'eux, le ſecond ſera compoſé du premier multiplié ou diviſé deux fois de ſuite par la raiſon de la progreſſion.

3°. Lorſqu'il y aura deux termes entre ceux que l'on comparera, le ſecond des deux termes comparés, ſera compoſé du premier multiplié ou diviſé trois fois de ſuite par la raiſon de la progreſſion.

Enfin quel que ſoit le nombre des termes qui ſe trouveront entre les deux termes que l'on comparera, le ſecond ſera toûjours compoſé du premier multiplié ou diviſé par la raiſon de la progreſſion, autant de fois de ſuite plus une fois, qu'il y aura de termes entre ceux que l'on comparera. On concevra aiſément tout ceci, pour peu qu'on examine la compoſition des termes des deux progreſſions qui ont ſervi d'exemples dans le corollaire premier.

COROLLAIRE V.

192 Donc ſi, dans une progreſſion géométrique, on prend quatre termes tels qu'il y ait autant de termes entre le premier & le ſecond, qu'entre le troiſiéme & le quatriéme, ces quatre termes ſeront en proportion géométrique.

Car (*N°.* 191.) en comparant le premier & le troiſiéme termes, avec le ſecond & le quatriéme; le ſecond ſera compoſé du premier multiplié ou diviſé par la raiſon de la progreſſion, autant de fois plus une fois qu'il y aura de termes entre le premier & le ſecond que l'on comparera; & le quatriéme ſera compoſé du troiſiéme multiplié ou diviſé par la même raiſon de la progreſſion, autant de fois plus une fois qu'il y aura de termes entre ces deux termes comparés : & comme on ſuppoſe qu'il y a autant de termes entre le premier & le ſecond, qu'entre le troiſiéme & le quatriéme; il eſt évident que le ſecond & le quatriéme ſeront compoſés du premier & du troiſiéme multipliés ou diviſés le même nombre de fois par la raiſon de la progreſſion. D'où il ſuit que le premier de ces quatre termes, ſera contenu dans le ſecond, ou contiendra le ſecond, autant de fois que le troiſiéme ſera contenu dans le quatriéme, ou contiendra le quatriéme; c'eſt-à-dire (*N°.* 102.) que ces quatre termes ſeront en proportion géométrique.

Et réciproquement, ſi dans une progreſſion géométrique, on prend quatre termes en proportion géométrique; il y aura autant de termes entre le premier & le ſecond qu'entre le troiſiéme & le quatriéme. Cette propoſition eſt une ſuite ſi naturelle de la précédente, qu'elle n'a pas beſoin de démonſtration.

Il eſt donc évident que quatre termes pris dans une progreſſion géométrique, de maniere que le ſecond ſuive immédiatement le premier, & que le quatriéme ſuive immédiatement le troiſiéme, ſeront auſſi en proportion géométrique. Car (*N°.* 188.) le ſecond ſera compoſé du premier multiplié ou diviſé une fois par la raiſon de la progreſſion, & le quatriéme ſera compoſé du troiſiéme multiplié ou diviſé pareillement une fois par la même raiſon.

Enfin il eſt aiſé de voir par tout ce que nous avons dit, que ſi dans une progreſſion géométrique, on prend trois termes quelconques de ſuite, ou trois termes tels qu'il y ait autant de termes entre le premier & le ſecond qu'entre le ſecond & le troiſiéme; ces trois termes feront une proportion géométrique continue; c'eſt-à-dire que le premier ſera au ſecond comme le ſecond eſt au troiſiéme.

Car (*N°.* 191 & 192.) pour compoſer le ſecond terme, il faudra multiplier ou diviſer autant de fois le premier par la raiſon de la progreſſion, qu'il faudra multiplier ou diviſer de fois le ſecond terme par la même raiſon de la progreſſion, pour avoir le troiſiéme.

THÉORÉME.

193 *Lorſque trois termes ſont en proportion continue, le quarré du terme moyen eſt égal au produit des deux extrêmes.*

Prenons pour exemple cette proportion continue $\div\!\!\div$ 3 ; 6 ; 12. Si l'on écrit deux fois de ſuite le terme du milieu, on la convertira (*N°.* 187.) en cette ſimple proportion 3 : 6 :: 6 : 12.

Mais (*N°.* 106.) le produit des moyens d'une proportion, eſt égal au produit des extrêmes; & les moyens de cette proportion étant égaux, le produit

des moyens eſt égal au quarré de l'un de ces moyens; c'eſt-à-dire au quarré du moyen de la proportion continue $\div\!\!\div 3 : 6 : 12$.

Donc dans une proportion continue, le quarré du terme moyen eſt égal au produit des extrêmes.

COROLLAIRE.

194 Puiſque dans une proportion continue, le quarré du terme moyen eſt égal au produit des extrêmes, & que des quantités égales ont des racines quarrées égales; il eſt clair que le terme moyen qui eſt la racine quarrée de ſon quarré, eſt égal à la racine quarrée du produit des extrêmes.

THÉORÈME.

195 *Le quotient d'une diviſion dont le dividende eſt plus grand d'une unité que le diviſeur, eſt égal à la ſomme de tous les termes d'une progreſſion géométrique décroiſſante compoſée d'une infinité de termes dont le premier eſt l'unité, & dont la raiſon eſt égale au dividende.*

Par exemple. *Le quotient de la diviſion de* 12 *par* 11, *eſt égal à la ſomme de tous les termes de cette progreſſion géométrique décroiſſante pouſſée à l'infini* $\div\!\!\div 1 : \frac{1}{12} : \frac{1}{12\times 12} : \frac{1}{12\times 12\times 12} :$ *&c.*

DÉMONSTRATION.

Pour fixer l'imagination & pour rendre ſenſible la démonſtration de ce théorême, ſuppoſons qu'on ait 12 à diviſer par 11.

1°. Le dividende 12 étant plus grand d'une unité que le diviſeur 11, le diviſeur y ſera contenu une fois: ainſi le premier terme du quotient ſera 1, & le reſte de la diviſion ſera auſſi 1.

2°. Le reſte 1 ne pouvant pas être diviſé par 11, on le réduira en *douziémes*, dont le dénominateur eſt égal au dividende propoſé; & l'on aura (N°. 54.) $\frac{12}{12}$ à diviſer par 11; ce qui donnera (N°. 66.) $\frac{1}{12}$ pour la ſeconde partie du quotient, & $\frac{1}{12}$ pour le reſte de cette opération.

3°. Le reſte $\frac{1}{12}$ ſera converti en *douziémes* de *douziéme*, en multipliant ſon numérateur & ſon dénominateur par 12, ce qui ne changera point la valeur de ce reſte (N°. 56.); & l'on aura $\frac{12}{12\times12}$ à diviſer par 11, ce qui donnera (N°. 66.) $\frac{1}{12\times12}$ pour la troiſiéme partie du quotient, & $\frac{1}{12\times12}$ pour le reſte de cette opération.

4°. Le reſte $\frac{1}{12\times12}$ n'étant qu'une unité fractionnaire, ſi l'on continue de multiplier ſon numérateur 1 & ſon dénominateur 12×12, par le nombre 12 plus grand d'une unité que le nombre 11 par lequel on doit diviſer; la nouvelle partie qu'on trouvera pour le quotient ſera encore une unité fractionnaire $\frac{1}{12\times12\times12}$ dont le dénominateur ſera 12 fois plus grand que celui de la partie précédente du quotient; & le reſte de l'opération ſera égal à la nouvelle partie $\frac{1}{12\times12\times12}$ du quotient.

Enfin comme il faudra toûjours multiplier par 12 le numérateur & le dénominateur du reſte qui ne ſera jamais qu'une unité fractionnaire; on aura toûjours à l'infini, pour le quotient & pour le reſte, de nouvelles unités fractionnaires continuellement 12 fois plus petites, ſans jamais parvenir à faire la diviſion ſans reſte.

Donc en diviſant le nombre 12 par 11, on trouvera pour le quotient cette ſuite infinie de termes $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}1 : \frac{1}{12} : \frac{1}{12\times12} : \frac{1}{12\times12\times12}$: &c, en progreſſion géométrique décroiſſante dont le premier eſt l'unité, & dont la raiſon eſt égale au dividende 12.

En appliquant le même raiſonnement à toute autre diviſion dont le dividende ſera plus grand d'une unité que le diviſeur, & en multipliant continuellement le numérateur & le dénominateur du reſte de chaque opération par le dividende, c'eſt-à-dire par un nombre plus grand d'une unité que le diviſeur; on trouvera toûjours pour le quotient, une progreſſion géométrique décroiſſante compoſée d'une infinité de termes dont le premier ſera 1, & dont la raiſon ſera égale au dividende.

On peut donc conclure en général, que le quotient d'une diviſion dont le dividende eſt plus grand d'une unité que le diviſeur, eſt égal à la ſomme de tous les termes d'une progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini, dont le premier terme eſt 1, & dont la raiſon eſt égale au dividende.

THÉORÈME.

196 *On aura la ſomme de tous les termes d'une progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini, quel que ſoit ſon premier terme, en diviſant la raiſon de cette progreſſion par un nombre plus petit qu'elle d'une unité, & en multipliant le quotient de cette diviſion par le premier terme de la progreſſion.*

DÉMONSTRATION.

Pour mieux faire entendre la démonſtration de ce théorême, prenons un exemple, & ſuppoſons qu'on veut avoir la ſomme de tous les termes de la progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} 54 : 18 : 6 : 2 : \frac{2}{3} :$ &c, qui (N°. 188.) eſt la même que celle-ci $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} 54 : \frac{54}{3} : \frac{54}{3\times3} : \frac{54}{3\times3\times3} : \frac{54}{3\times3\times3\times3} :$ &c, dont la raiſon eſt 3.

Comme le premier terme de cette progreſſion n'eſt pas l'unité, on en diviſera tous les termes par le premier 54; ce qui donnera cette nouvelle progreſſion $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1 : $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{3\times3}$: $\frac{1}{3\times3\times3}$: $\frac{1}{3\times3\times3\times3}$: &c, qui aura l'unité pour premier terme, & dont la raiſon ſera 3, comme celle de la progreſſion propoſée; parce qu'en diviſant tous les termes de la premiere progreſſion par 54, on n'a diviſé que leurs numérateurs, & qu'on n'a point touché aux dénominateurs, ou à la raiſon 3 par laquelle ces termes ſont continuellement diviſés.

La ſomme de tous les termes de cette nouvelle progreſſion $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1 : $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{3\times3}$: $\frac{1}{3\times3\times3}$: $\frac{1}{3\times3\times3\times3}$: &c, ne ſera que la cinquante-quatriéme partie de la ſomme des termes de la premiere; puiſque tous les termes nouveaux ſont 54 fois plus petits que les anciens. Ainſi quand on aura trouvé la valeur de la ſomme de tous les termes de la nouvelle progreſſion, il faudra multiplier cette valeur par 54, pour avoir la ſomme de tous les termes de la premiere progreſſion $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 54 : $\frac{54}{3}$: $\frac{54}{3\times3}$: $\frac{54}{3\times3\times3}$: $\frac{54}{3\times3\times3\times3}$: &c.

Mais (N°. 195.) on aura la ſomme des termes de la nouvelle progreſſion $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1 : $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{3\times3}$: $\frac{1}{3\times3\times3}$: $\frac{1}{3\times3\times3\times3}$: &c dont le premier terme eſt 1, & dont la raiſon eſt 3, en diviſant la raiſon 3 de cette progreſſion par 2.

Donc on aura la ſomme de tous les termes de la premiere progreſſion, qui eſt 54 fois plus grande que la nouvelle, en multipliant par 54 le quotient qu'on a trouvé pour la valeur de la nouvelle; c'eſt-à-dire en diviſant la raiſon 3 de la progreſſion par le nombre 2 plus petit d'une unité que cette raiſon, & en multipliant le quotient de cette diviſion par le premier terme 54 de la progreſſion.

COROLLAIRE PREMIER.

197 La regle qu'on vient d'établir pour trouver la ſomme de tous les termes d'une progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini, eſt générale; mais elle eſt rélative à une progreſſion réſultante de la diviſion continuelle d'un premier terme par un même nombre plus grand que l'unité.

Ainſi lorſqu'on propoſera de trouver la ſomme de tous les termes d'une progreſſion réſultante de la multiplication continuelle d'un premier terme, par une même fraction moindre que l'unité; il faudra changer la forme de cette progreſſion, & regarder tous ſes termes, comme s'ils venoient de la diviſion continuelle d'un même terme par une même fraction inverſe de la premiere, & par conſéquent plus grande que l'unité. Alors la progreſſion ſera en état d'être ſommée par la regle qu'on vient de donner.

Par exemple ſi l'on propoſe de trouver la ſomme de tous les termes de cette progreſſion $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}1 : \frac{2}{3} : \frac{4}{9} : \frac{8}{27} : \frac{16}{81}$:&c, ou $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}1 : \frac{2}{3} : \frac{2}{3}\times\frac{2}{3} : \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} : \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$: &c, réſultante de la multiplication continuelle du premier terme 1, par la même fraction $\frac{2}{3}$ moindre que l'unité; il faudra lui donner cette forme $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}1 : \frac{1}{\frac{3}{2}} : \frac{1}{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}} : \frac{1}{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}} : \frac{1}{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}$: &c; c'eſt-à-dire (N°. 188.) qu'on la regardera comme ſi tous ſes termes réſultoient du premier terme 1 diviſé continuellement par la fraction $\frac{3}{2}$ inverſe de la fraction $\frac{2}{3}$.

La progreſſion étant réduite à cette forme où elle a l'unité pour premier terme, & la fraction $\frac{3}{2}$ pour raiſon; on trouvera la ſomme de tous ſes termes en diviſant ſa raiſon $\frac{3}{2}$ par $\frac{1}{2}$ qui eſt d'une unité moindre

que $\frac{3}{2}$. Or en diviſant $\frac{3}{2}$ par $\frac{1}{2}$, ou (N°. 72.), en multipliant $\frac{3}{2}$ par 2, le nombre 3 qu'on trouvera ſera égal à la ſomme de tous les termes de la progreſſion $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} 1 : \frac{1}{\frac{3}{2}} : \frac{1}{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}} : \frac{1}{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}} : \frac{1}{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}$: &c, décroiſſante à l'infini, & par conſéquent de la propoſée $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} 1 : \frac{2}{3} : \frac{4}{9} : \frac{8}{27} : \frac{16}{81}$: &c qui lui eſt égale.

Corollaire II.

198 Donc 1°. la ſomme de tous les termes poſſibles de cette progreſſion décroiſſante à l'infini $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8}$: &c, eſt égale à l'unité.

2°. La ſomme de tous les termes de celle-ci $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{2}{3} : \frac{2}{9} : \frac{2}{27}$: &c, eſt pareillement égale à l'unité.

3°. La ſomme de tous les termes de celle-ci $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{3}{4} : \frac{3}{16} : \frac{3}{64}$: &c, eſt encore égale à l'unité.

Enfin la ſomme de tous les termes d'une progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini, qui aura pour premier terme une fraction dont le dénominateur ſurpaſſera le numérateur d'une unité, & qui aura pour raiſon le dénominateur du premier terme, ſera égale à l'unité: & comme on peut faire une infinité de progreſſions géométriques différentes qui auront toutes ces deux conditions; il eſt clair qu'on peut auſſi avoir une infinité de différentes progreſſions géométriques décroiſſantes à l'infini, dont chacune aura une ſomme égale à l'unité, & dont toutes les ſommes ſeront par conſéquent égales entr'elles.

Théorème.

199 *On aura la ſomme d'un nombre quelconque de termes pris de ſuite dans une progreſſion géométrique, en diviſant la raiſon de la progreſſion par un nombre plus*

petit qu'elle d'une unité, en multipliant le quotient par la différence du plus grand terme au plus petit, & en ajoûtant le plus petit terme au produit de cette multiplication.

DÉMONSTRATION.

Pour faciliter l'intelligence de la démonſtration, ſuppoſons qu'on veut avoir la ſomme d'un nombre de termes en progreſſion géométrique, dont le plus grand eſt 15625, le plus petit 25, & dont la raiſon eſt 5; & le plus petit terme excepté, regardons les autres termes dont on demande la ſomme, comme la différence de deux progreſſions décroiſſantes à l'infini, qui ont toutes deux 5 pour leur raiſon. Que la premiere de ces progreſſions ait pour premier terme le plus grand terme 15625, & que la ſeconde ait pour premier terme le nombre 25 qui eſt le plus petit de ceux dont on demande la ſomme.

1°. On aura (N°. 196.) la ſomme de tous les termes de la progreſſion décroiſſante à l'infini, dont le premier eſt 15625, & dont la raiſon eſt 5, en diviſant la raiſon 5 par 4, & en multipliant le quotient $1\frac{1}{4}$ par le premier terme 15625; ce qui produira $19531\frac{1}{4}$ pour la ſomme du nombre infini de termes de cette progreſſion.

2°. On aura (N°. 196.) la ſomme de tous les termes de la progreſſion décroiſſante à l'infini, qui a 25 pour premier terme, & 5 pour ſa raiſon; en diviſant la raiſon 5 par 4, & en multipliant le quotient $1\frac{1}{4}$ par le premier terme 25; ce qui donnera $31\frac{1}{4}$ pour la ſomme du nombre infini de termes de cette progreſſion.

Retranchant la ſomme $31\frac{1}{4}$ de la ſeconde progreſſion, de la ſomme $19531\frac{1}{4}$ de la premiere, le reſte 19500 contiendra évidemment la ſomme de

de tous les termes qu'on demande, excepté le plus petit 25; parce que ce plus petit terme eſt compris dans la ſomme des termes de la ſeconde progreſſion qu'on a retranchée. Ainſi en ajoûtant 25 au reſte 19500 qu'on vient de trouver, le total 19525 ſera la ſomme demandée de tous les termes dont le plus grand eſt 15625 & le plus petit 25, pris de ſuite dans la progreſſion géométrique dont la raiſon eſt 5.

Si l'on examine cette opération, & qu'on faſſe attention qu'en ôtant $31\frac{1}{4}$ de $19531\frac{1}{4}$, on a retranché le produit de $1\frac{1}{4}$ multiplié par 25, du produit de $1\frac{1}{4}$ multiplié par 15625; on concevra aiſément qu'on auroit eu la même choſe en multipliant $1\frac{1}{4}$ ou $\frac{5}{4}$ par 15600 différence de 15625 à 25. Ainſi le reſte 19500 qu'on a trouvé, n'eſt rien autre choſe que le quotient $\frac{5}{4}$ de la raiſon 5 diviſée par 4, qu'on a multiplié par la différence 15600 du plus grand terme au plus petit terme: & comme il eſt évident que ce produit 19500 ne contient point le plus petit terme 25, on ajoûte ce terme au produit 19500, comme il eſt preſcrit par le théorême; & l'on trouve 19525 pour la ſomme demandée des termes dont le plus grand eſt 15625 & le plus petit 25, pris de ſuite dans une progreſſion dont la raiſon eſt 5.

CHAPITRE IV.

Des Logarithmes & de leur uſage dans l'Arithmétique.

DÉFINITIONS.

200 SI l'on imagine que tous les nombres ſont contenus dans une même progreſſion géométrique dont l'un des termes ſoit l'unité; la diſtance qu'il y aura d'un terme quelconque de cette progreſſion à l'unité, ſera nommée le *Logarithme* de ce terme.

On entend par *Diſtance d'un terme à l'unité* le nombre de termes qu'il y a depuis l'unité excluſivement, juſqu'à ce terme incluſivement.

COROLLAIRE PREMIER.

201 La progreſſion géométrique, dans laquelle on imaginera que tous les nombres ſont contenus, ne pouvant avoir qu'un ſeul terme égal à l'unité que l'on regarde comme l'origine de la progreſſion; la diſtance de l'unité à l'origine ſera zéro; & par conſéquent zéro ſera le logarithme de l'unité.

COROLLAIRE II.

202 Si l'on a cette progreſſion géométrique $\frac{..}{..}$ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c dont l'unité eſt le premier terme ou l'origine, & dont la raiſon eſt 10, c'eſt-à-dire dont les termes ſont les produits de

l'unité multipliée continuellement par 10; le premier terme 10 qui ſuit l'origine, & qui eſt compoſé de l'unité multipliée ſimplement une fois par 10, ſera à la premiere diſtance de l'unité; & par conſéquent le logarithme de ce terme 10 ſera 1. Le nombre 100 qu'on trouve en multipliant l'unité deux fois de ſuite par 10, ſera à la ſeconde diſtance de l'unité: ainſi le logarithme de ce nombre 100 ſera 2. Il en ſera de même des autres termes 1000, 10000, 100000, &c de la même progreſſion, qui étant produits en multipliant l'unité 3 fois, 4 fois, 5 fois de ſuite &c par la raiſon 10, ſeront à la troiſiéme, quatriéme, cinquiéme diſtances &c de l'unité, & auront par conſéquent les nombres 3, 4, 5, &c pour logarithmes.

Si l'on avoit pris la progreſſion géométrique ∴ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : &c dont le premier terme eſt 1, dont la raiſon eſt 2, & dont tous les termes ſont par conſéquent les produits de l'unité multipliée continuellement par 2; le premier terme 2 après l'unité auroit eu l'unité pour ſon logarithme, & les logarithmes des termes ſuivans, 4, 8, 16, 32, &c auroient été 2, 3, 4, 5, &c.

COROLLAIRE III.

203 Puiſque (N°. 202.) les mêmes nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c peuvent ſervir de logarithmes à différens nombres conſidérés dans différentes progreſſions géométriques; il eſt clair qu'on aura autant de ſyſtêmes différens de logarithmes, qu'on voudra conſidérer de progreſſions géométriques différentes; mais il faut remarquer que dans toutes ces progreſſions géométriques, l'unité, qui ſera toûjours à l'origine, aura zéro pour logarithme.

Comme la progreſſion géométrique décuple ∴ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c, eſt le fondement de la numération ; c'eſt à cette progreſſion que l'on a rapporté tous les nombres dont on trouve les logarithmes dans les tables : c'eſt-à-dire que dans toutes les tables de logarithmes, qui ont été publiées juſqu'à préſent, on trouve que les nombres en progreſſion géométrique ∴ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c, ont pour logarithmes 0, 1, 2, 3, 4, &c.

Corollaire IV.

204 Quand on ne conſidére point d'autres termes que ceux de la progreſſion géométrique croiſſante ∴ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c, qui a l'unité pour premier terme ; on voit bien que leurs logarithmes ſont les termes correſpondans d'une progreſſion arithmétique croiſſante ∴ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . &c, qui a zéro pour premier terme ou pour logarithme de l'unité. On voit bien auſſi que les logarithmes ∴ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . &c des termes de la progreſſion géométrique, expriment par le nombre de leurs unités, le nombre de fois qu'il a fallu multiplier le premier terme de la progreſſion par ſa raiſon 10, pour compoſer tous les termes de cette progreſſion ; en ſorte qu'on peut dire que le logarithme d'un nombre, eſt le nombre des raiſons de la progreſſion, qui compoſent ce nombre par leur multiplication. Par exemple, on peut dire que 1, 2, 3, 4, &c ſont les logarithmes des nombres 10, 100, 1000, 10000, &c ; parce qu'il faut 1, 2, 3, 4, &c raiſons 10 de la progreſſion, multipliées enſemble, pour compoſer les nombres 10, 100, 1000, 10000, &c.

Il ſuit de là que le logarithme d'une quantité infi-

nie, eſt un nombre infini. Car un terme infini de la progreſſion géométrique ∴ 1 : 10 : 100 : 1000 : &c, contiendra la raiſon 10 de cette progreſſion une infinité de fois.

COROLLAIRE V.

205 Puiſque les termes de la progreſſion géométrique croiſſante ∴ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c, ont pour logarithmes les termes correſpondans de la progreſſion arithmétique croiſſante ∴ 0. 1. 2. 3. 4. &c; il eſt évident que la même progreſſion géométrique étant conſidérée en décroiſſant, ou ſous cette forme ∴ 10000 : 1000 : 100 : 10 : 1 : &c; ſes termes auront pour logarithmes, les termes correſpondans de la progreſſion arithmétique décroiſſante ∴ 4 . 3 . 2 . 1 . 0. &c.

Si l'on continue la même progreſſion géométrique au-deſſous de l'unité, en diviſant continuellement par 10 les termes de cette progreſſion; l'on aura ∴ 10000 : 1000 : 100 : 10 : 1 : $\frac{1}{10}$: $\frac{1}{100}$: $\frac{1}{1000}$: &c. Et comme les termes de la progreſſion arithmétique qui ſervent de logarithmes à ceux de cette progreſſion géométrique, doivent décroître continuellement d'une unité, à meſure que les termes correſpondans de la progreſſion géométrique deviennent 10 fois plus petits; en continuant au delà de zéro la progreſſion arithmétique décroiſſante, on trouvera des termes négatifs ou faux, -1, -2, -3, &c, pour répondre à ceux $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, &c, qui ſont moindres que l'unité dans la progreſſion géométrique; en ſorte que les termes de la progreſſion géométrique ∴ 10000 : 1000 : 100 : 10 : 1 : $\frac{1}{10}$: $\frac{1}{100}$: $\frac{1}{1000}$: &c, auront pour termes correſpondans, & par conſéquent

pour logarithmes, les termes de cette progreſſion arithmétique $\div$ 4. 3. 2. 1. 0. -1. -2. -3. &c, compoſée de nombres poſitifs & de nombres négatifs.

COROLLAIRE VI.

206 Il eſt donc évident par le corollaire précédent, que

1°. Les nombres plus petits que l'unité ont pour logarithmes des nombres faux ou moindres que zéro.

2°. Deux nombres tels que 10 & $\frac{1}{10}$, ou 100 & $\frac{1}{100}$, ou 1000 & $\frac{1}{1000}$ &c, qui ſont à diſtances égales de l'unité, ou dont le plus petit eſt égal à une fraction qui a l'unité pour numérateur, & le plus grand pour dénominateur, ont pour logarithmes le même nombre 1 ou 2 ou 3 &c; avec cette différence cependant, que le logarithme du nombre plus grand que l'unité eſt un nombre vrai, & que le logarithme du nombre plus petit que l'unité eſt un nombre faux: c'eſt-à-dire que les nombres

plus grands que l'unité,	10,	100,	1000,	&c.
ont pour logarithmes les nombres vrais	1,	2,	3,	&c.
& que les nombres moindres que l'unité	$\frac{1}{10}$,	$\frac{1}{100}$,	$\frac{1}{1000}$,	&c.
ont pour logarithmes les nombres faux	-1,	-2,	-3,	&c.

Car il faut multiplier l'unité, le même nombre de fois par 10, pour avoir les premiers nombres 10, 100, 1000, &c, qu'il faut diviſer de fois la même unité par 10, pour avoir les fractions $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, &c.

3°. Le logarithme de zéro eſt un nombre infini

négatif; car zéro peut être conſidéré comme une fraction infiniment petite qui auroit l'unité pour numérateur, & un nombre infini pour dénominateur : ainſi zéro doit avoir le même logarithme, qu'un nombre infini, avec cette différence que le logarithme de zéro, doit être un nombre faux, & que le logarithme du nombre infini doit être un nombre vrai; & nous avons vû (N°. 204.) que le logarithme d'un nombre infiniment grand, eſt infini.

Avertiſſement.

Juſqu'ici nous n'avons parlé que des nombres qui ſont les termes de la progreſſion géométrique décuple

$$\frac{1}{10000} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : \&c$$

dont la raiſon eſt 10, & de leurs logarithmes ou des termes correſpondans de la progreſſion arithmétique

$$-4 . -3 . -2 . -1 . 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . \&c$$

dont la raiſon eſt 1. Ainſi il nous reſte à faire voir comment les nombres intermédiaires aux termes de la progreſſion géométrique peuvent être placés dans cette progreſſion, & comment on peut avoir leurs logarithmes ou leurs diſtances à l'origine.

207 Comme (N°. 206.) un nombre plus petit que l'unité, a le même logarithme qu'un nombre plus grand que l'unité, pris à la même diſtance de l'origine de la progreſſion dans laquelle on ſuppoſe que ces deux nombres ſont compris, avec cette différence cependant, que le logarithme du premier eſt un nombre faux, & que le logarithme du ſecond eſt un nombre vrai; il ſuffira pour expliquer en général la conſtruction des tables des logarithmes, de faire voir

comment tous les nombres plus grands que l'unité, & qui ſont différens des termes de la progreſſion décuple ∴ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c, peuvent être placés dans cette progreſſion.

Et comme la progreſſion géométrique décuple ∴ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c, dont les termes ont pour logarithmes ∴ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . &c, paſſe tout d'un coup de 1 à 10, de 10 à 100, de 100 à 1000, &c; ſi l'on avoit une table de logarithmes à compoſer, il faudroit trouver les logarithmes des huit nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, plus grands que l'unité, & plus petits que 10; & pour continuer la table juſqu'à 100, il faudroit pareillement trouver les logarithmes des 89 nombres plus grands que 10 & moindres que 100; enfin il faudroit chercher les logarithmes de tous les nombres entiers qui ſont intermédiaires à ceux de la progreſſion décuple.

Pour trouver les logarithmes de tous ces termes intermédiaires, le Baron de Neper, Ecoſſois, inventeur des logarithmes, & ſon aſſocié Henri Brigge, profeſſeur à Oxford, ont pris 1 & 10 pour les extrêmes d'une progreſſion géométrique compoſée de 1000000000000000 termes, & 0 & 1 logarithmes de 1 & 10, pour les extrêmes d'un pareil nombre de termes d'une progreſſion arithmétique; & ils ont regardé les termes de cette ſeconde progreſſion comme les logarithmes des termes correſpondans de la premiere.

Ils ont pareillement conſidéré, dans la progreſſion géométrique décuple, deux termes quelconques pris de ſuite, tels que 10 & 100, 100 & 1000, 1000 & 10000 &c, comme les extrêmes d'autant de progreſſions géométriques de 1000000000000000 termes; & ont regardé les termes correſpondans 1 & 2, 2 & 3,

3 & 4 &c, de la progreſſion arithmétique, comme les extrêmes d'un pareil nombre de progreſſions arithmétiques de 1000000000000000 termes ſervant de logarithmes aux termes des progreſſions géométriques correſpondantes.

Les termes de ces nouvelles progreſſions géométriques, inſérés entre ceux de la progreſſion géométrique décuple ∴ 1 : 10 : 100 : 1000 : &c, croiſſent d'une quantité ſi petite, que deux termes de ſuite peuvent être pris l'un pour l'autre, ſans qu'on ait à craindre une erreur ſenſible. Et comme les nombres entiers pris entre 1 & 10, & tous ceux qui ſeront entre les autres termes de la progreſſion décuple ∴ 1 : 10 : 100 : 1000 : &c, ſeront moyens entre deux termes des nouvelles progreſſions, ou ſeront préciſément quelques-uns de leurs termes; on pourra, ſans craindre aucune erreur qui mérite qu'on y faſſe attention, prendre pour les nombres entiers intermédiaires aux termes de la progreſſion décuple, les termes des progreſſions intermédiaires, qui en approcheront le plus; en ſorte que les logarithmes des nombres entiers intermédiaires aux termes de la progreſſion décuple, ſeront égaux aux logarithmes des termes dont ils approcheront le plus dans les progreſſions géométriques intermédiaires.

Pour repréſenter les logarithmes de tous les nombres entiers, en ſuppoſant qu'ils ſont termes des nouvelles progreſſions géométriques intermédiaires compoſées chacune de 1000000000000000 termes, en y comprenant les termes de la progreſſion décuple qui leur ſervent d'extrêmes, Neper & Brigge ont employé des fractions décimales, qu'ils ont été obligés de pouſſer juſqu'à 14 chiffres décimaux. Mais le Baron de Neper étant mort peu de temps après le

commencement de l'ouvrage ; Brigge fut chargé de tout le travail, & publia à Londres en 1624, une Table de logarithmes pouſſée juſqu'à 14 chiffres décimaux, pour tous les nombres entiers depuis 1 juſqu'à 20000 & depuis 90000 juſqu'à 101000, en laiſſant une lacune depuis 20000 juſqu'à 90000.

Adrien Vlacq ayant rempli la lacune que Brigge avoit laiſſée dans ſes Tables ; c'eſt-à-dire ayant calculé les logarithmes de tous les nombres entiers depuis 20000 juſqu'à 90000, publia en 1628 à Gouda en Hollande, une Table de logarithmes pour tous les nombres entiers depuis 1 juſqu'à 100000 ; mais ayant conſidéré qu'on pouvoit ſans inconvénient ſupprimer les quatre derniers chiffres décimaux de Brigge, il n'a pouſſé les logarithmes de ſes Tables que juſqu'à dix chiffres décimaux.

Enfin, comme les Tables de logarithmes ont été principalement faites en faveur des Aſtronomes qui n'ont beſoin pour leur uſage que des ſept premieres décimales des logarithmes ; dans toutes les Tables qui ont été publiées depuis Vlacq, les logarithmes de la plus grande partie des nombres, ont été réduits à ſept figures décimales.

208 Nous donnons une petite Table des logarithmes des nombres entiers depuis 1 juſqu'à 200 ſeulement. Elle nous ſervira pour montrer l'uſage qu'on peut faire des logarithmes dans l'Arithmétique.

Comme nous nous bornons à ſept chiffres décimaux, nous négligeons tous les autres, lorſqu'ils ne valent pas la moitié d'une unité décimale du ſeptiéme ordre ; mais lorſqu'ils excédent la moitié de cette unité, nous ajoûtons 1 à la ſeptiéme figure. Il ſuit de là que deux logarithmes de la Table, étant ajoûtés enſemble ou ſouſtraits l'un de l'autre, donneront ſou-

vent une ſomme ou une différence plus grande ou plus petite de près d'une unité décimale du ſeptiéme ordre, que la ſomme ou la différence qu'ils auroient donnée s'ils avoient été exacts.

Dans cette Table, les colonnes qui ont à la tête la lettre *N*, contiennent les nombres naturels ; & celles qui ont en tête *Logarithmes*, contiennent les logarithmes de ces nombres. On remarquera que le premier chiffre de la gauche de chaque logarithme, eſt ſéparé des autres par une virgule qui marque que les chiffres de la droite ne ſont que des chiffres décimaux.

Le premier chiffre de la gauche ſe nomme *Caractériſtique* du logarithme ; parce qu'il marque dans laquelle des progreſſions géométriques intermédiaires aux termes de la progreſſion décuple ∴ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c le nombre eſt placé.

Les logarithmes de tous les nombres moindres que 10, & qui ſont compris dans la premiere progreſſion géométrique intermédiaire dont 1 & 10 ſont les extrêmes, ont zéro, c'eſt-à-dire le logarithme du premier terme de cette progreſſion, pour caractériſtique, ou pour premier chiffre de la gauche.

Les logarithmes de tous les nombres moindres que 100, compris dans la ſeconde progreſſion géométrique intermédiaire dont 10 & 100 ſont les extrêmes, ont pour caractériſtique le logarithme 1 du premier terme de cette progreſſion.

Enfin les logarithmes de tous les nombres moindres que le dernier extrême de la progreſſion intermédiaire, dans laquelle ils ſeront compris, auront pour caractériſtique le logarithme du premier terme de cette progreſſion.

N.	Logarithmes.	N.	Logarithmes.	N.	Logarithmes.
1	0,0000000	34	1,5314789	67	1,8260748
2	0,3010300	35	1,5440680	68	1,8325089
3	0,4771213	36	1,5563025	69	1,8388491
4	0,6020600	37	1,5682017	70	1,8450980
5	0,6989700	38	1,5797836	71	1,8512583
6	0,7781513	39	1,5910646	72	1,8573325
7	0,8450980	40	1,6020600	73	1,8633229
8	0,9030900	41	1,6127839	74	1,8692317
9	0,9542425	42	1,6232493	75	1,8750613
10	1,0000000	43	1,6334685	76	1,8808136
11	1,0413927	44	1,6434527	77	1,8864907
12	1,0791812	45	1,6532125	78	1,8920946
13	1,1139434	46	1,6627578	79	1,8976271
14	1,1461280	47	1,6720979	80	1,9030900
15	1,1760913	48	1,6812412	81	1,9084850
16	1,2041200	49	1,6901961	82	1,9138139
17	1,2304489	50	1,6989700	83	1,9190781
18	1,2552725	51	1,7075702	84	1,9242793
19	1,2787536	52	1,7160033	85	1,9294189
20	1,3010300	53	1,7242759	86	1,9344985
21	1,3222193	54	1,7323938	87	1,9395193
22	1,3424227	55	1,7403627	88	1,9444827
23	1,3617278	56	1,7481880	89	1,9493900
24	1,3802112	57	1,7558749	90	1,9542425
25	1,3979400	58	1,7634280	91	1,9590414
26	1,4149733	59	1,7708520	92	1,9637878
27	1,4313638	60	1,7781513	93	1,9684829
28	1,4471580	61	1,7853298	94	1,9731279
29	1,4623980	62	1,7923917	95	1,9777236
30	1,4771213	63	1,7993405	96	1,9822712
31	1,4913617	64	1,8061800	97	1,9867717
32	1,5051500	65	1,8129134	98	1,9912261
33	1,5185139	66	1,8195439	99	1,9956352
				100	2,0000000

N.	Logarithmes.	N.	Logarithmes.	N.	Logarithmes.
101	2,0043214	134	2,1271048	167	2,2227165
102	2,0086002	135	2,1303338	168	2,2253093
103	2,0128372	136	2,1335389	169	2,2278867
104	2,0170333	137	2,1367206	170	2,2304489
105	2,0211893	138	2,1398791	171	2,2329961
106	2,0253059	139	2,1430148	172	2,2355284
107	2,0293838	140	2,1461280	173	2,2380461
108	2,0334238	141	2,1492191	174	2,2405492
109	2,0374265	142	2,1522883	175	2,2430380
110	2,0413927	143	2,1553360	176	2,2455127
111	2,0453230	144	2,1583625	177	2,2479733
112	2,0492180	145	2,1613680	178	2,2504200
113	2,0530784	146	2,1643529	179	2,2528530
114	2,0569049	147	2,1673173	180	2,2552725
115	2,0606978	148	2,1702617	181	2,2576786
116	2,0644580	149	2,1731863	182	2,2600714
117	2,0681859	150	2,1760913	183	2,2624511
118	2,0718820	151	2,1789769	184	2,2648178
119	2,0755470	152	2,1818436	185	2,2671717
120	2,0791812	153	2,1846914	186	2,2695129
121	2,0827854	154	2,1875207	187	2,2718416
122	2,0863598	155	2,1903317	188	2,2741578
123	2,0899051	156	2,1931246	189	2,2764618
124	2,0934217	157	2,1958997	190	2,2787536
125	2,0969100	158	2,1986571	191	2,2810334
126	2,1003705	159	2,2013971	192	2,2833012
127	2,1038037	160	2,2041200	193	2,2855573
128	2,1072100	161	2,2068259	194	2,2878017
129	2,1105897	162	2,2095150	195	2,2900346
130	2,1139434	163	2,2121876	196	2,2922561
131	2,1172713	164	2,2148438	197	2,2944662
132	2,1205739	165	2,2174839	198	2,2966652
133	2,1238516	166	2,2201081	199	2,2988531
				200	2,3010300

N.	Logarithmes.	N.	Logarithmes.	N.	Logarithmes.
1	0,0000000	34	1,5314789	67	1,8260748
2	0,3010300	35	1,5440680	68	1,8325089
3	0,4771213	36	1,5563025	69	1,8388491
4	0,6020600	37	1,5682017	70	1,8450980
5	0,6989700	38	1,5797836	71	1,8512583
6	0,7781513	39	1,5910646	72	1,8573325
7	0,8450980	40	1,6020600	73	1,8633229
8	0,9030900	41	1,6127839	74	1,8692317
9	0,9542425	42	1,6232493	75	1,8750613
10	1,0000000	43	1,6334685	76	1,8808136
11	1,0413927	44	1,6434527	77	1,8864907
12	1,0791812	45	1,6532125	78	1,8920946
13	1,1139434	46	1,6627578	79	1,8976271
14	1,1461280	47	1,6720979	80	1,9030900
15	1,1760913	48	1,6812412	81	1,9084850
16	1,2041200	49	1,6901961	82	1,9138139
17	1,2304489	50	1,6989700	83	1,9190781
18	1,2552725	51	1,7075702	84	1,9242793
19	1,2787536	52	1,7160033	85	1,9294189
20	1,3010300	53	1,7242759	86	1,9344985
21	1,3222193	54	1,7323938	87	1,9395193
22	1,3424227	55	1,7403627	88	1,9444827
23	1,3617278	56	1,7481880	89	1,9493900
24	1,3802112	57	1,7558749	90	1,9542425
25	1,3979400	58	1,7634280	91	1,9590414
26	1,4149733	59	1,7708520	92	1,9637878
27	1,4313638	60	1,7781513	93	1,9684829
28	1,4471580	61	1,7853298	94	1,9731279
29	1,4623980	62	1,7923917	95	1,9777236
30	1,4771213	63	1,7993405	96	1,9822712
31	1,4913617	64	1,8061800	97	1,9867717
32	1,5051500	65	1,8129134	98	1,9912261
33	1,5185139	66	1,8195439	99	1,9956352
				100	2,0000000

N.	Logarithmes.	N.	Logarithmes.	N.	Logarithmes.
101	2,0043214	134	2,1271048	167	2,2227165
102	2,0086002	135	2,1303338	168	2,2253093
103	2,0128372	136	2,1335389	169	2,2278867
104	2,0170333	137	2,1367206	170	2,2304489
105	2,0211893	138	2,1398791	171	2,2329961
106	2,0253059	139	2,1430148	172	2,2355284
107	2,0293838	140	2,1461280	173	2,2380461
108	2,0334238	141	2,1492191	174	2,2405492
109	2,0374265	142	2,1522883	175	2,2430380
110	2,0413927	143	2,1553360	176	2,2455127
111	2,0453230	144	2,1583625	177	2,2479733
112	2,0492180	145	2,1613680	178	2,2504200
113	2,0530784	146	2,1643529	179	2,2528530
114	2,0569049	147	2,1673173	180	2,2552725
115	2,0606978	148	2,1702617	181	2,2576786
116	2,0644580	149	2,1731863	182	2,2600714
117	2,0681859	150	2,1760913	183	2,2624511
118	2,0718820	151	2,1789769	184	2,2648178
119	2,0755470	152	2,1818436	185	2,2671717
120	2,0791812	153	2,1846914	186	2,2695129
121	2,0827854	154	2,1875207	187	2,2718416
122	2,0863598	155	2,1903317	188	2,2741578
123	2,0899051	156	2,1931246	189	2,2764618
124	2,0934217	157	2,1958997	190	2,2787536
125	2,0969100	158	2,1986571	191	2,2810334
126	2,1003705	159	2,2013971	192	2,2833012
127	2,1038037	160	2,2041200	193	2,2855573
128	2,1072100	161	2,2068259	194	2,2878017
129	2,1105897	162	2,2095150	195	2,2900346
130	2,1139434	163	2,2121876	196	2,2922561
131	2,1172713	164	2,2148438	197	2,2944662
132	2,1205739	165	2,2174839	198	2,2966652
133	2,1238516	166	2,2201081	199	2,2988531
				200	2,3010300

Comme la quantité de chiffres de chaque nombre, indiquera toûjours dans quelle progreſſion intermédiaire ce nombre ſera contenu; la caractériſtique du logarithme de chaque nombre, contiendra autant d'unités moins une qu'il y aura de chiffres dans ce nombre. Par exemple tous les nombres depuis 1 juſqu'à 9, qui ſont exprimés par un ſeul chiffre, auront 0 pour caractériſtique; tous les nombres depuis 10 juſqu'à 99, qui ſont compoſés de deux chiffres, auront 1 pour caractériſtique; tous les nombres depuis 100 juſqu'à 999, auront 2 pour caractériſtique: & ainſi des autres.

Il ſuit delà que, dans une Table de logarithmes, on peut ſans aucun inconvénient ſupprimer la caractériſtique; puiſqu'on peut aiſément y ſuppléer, en mettant pour elle un chiffre qui ait une unité de moins que la quantité des chiffres du nombre dont on veut avoir le logarithme.

Les chiffres décimaux, qui ſont à la droite de la virgule dans les logarithmes, indiquent les places que les nombres naturels, auſquels ces logarithmes appartiennent, occupent dans les progreſſions géométriques intermédiaires aux termes de la progreſſion décuple: en ſorte que les nombres qui occupent des places ſemblables dans les progreſſions intermédiaires, ont les mêmes chiffres décimaux dans leurs logarithmes.

Par exemple les nombres 1, 10, 100, 1000, 10000, &c qui ſont aux origines des progreſſions intermédiaires, n'ont que des zéros pour chiffres décimaux de leurs logarithmes.

Les nombres 2, 20, 200, 2000, 20000, &c qui occupent les 3010300^{émes} places après les origines, ont tous 3010300 pour chiffres décimaux de leurs logarithmes.

Les nombres 3, 30, 300, 3000, 30000, &c qui occupent les 4771213^{émes} places après les origines

dans les progreſſions géométriques intermédiaires, ont tous 4771213 pour chiffres décimaux de leurs logarithmes : & ainſi des autres.

THÉORÉME.

209 *Lorſque quatre nombres ſont en proportion géométrique, leurs logarithmes ſont en proportion arithmétique.*

DÉMONSTRATION.

Quatre nombres en proportion géométrique, tels que 2 : 6 :: 12 : 36, étant ſuppoſés contenus dans une même progreſſion géométrique qui a l'unité pour origine ; il y aura (N°. 192.) autant de termes de la progreſſion géométrique entre le premier nombre 2 & le ſecond 6, qu'entre le troiſiéme 12 & le quatriéme 36. Ainſi la différence des logarithmes ou des diſtances des deux premiers nombres 2 & 6 à l'origine de la progreſſion géométrique, ſera égale à la différence des logarithmes ou des diſtances des deux derniers nombres, à la même origine : & par conſéquent les logarithmes des quatre nombres 2 : 6 :: 12 : 36 en proportion géométrique, ſeront en proportion arithmétique.

Si l'on conſulte la petite Table que nous avons donnée, on trouvera que les logarithmes des quatre nombres 2 : 6 :: 12 : 36, *ſont* 0, 3010300 . 0, 7781513 : 1, 0791812 . 1, 5563025, *qui ſe trouvent en proportion arithmétique.*

COROLLAIRE PREMIER.

210 Si quatre nombres n'étoient point en proportion géométrique, leurs logarithmes ne ſeroient pas en proportion arithmétique.

Car en considérant que ces quatre nombres sont contenus dans une même progression géométrique qui a l'unité pour origine, il y aura plus ou moins de termes de cette progression entre les deux premiers nombres, qu'entre les deux derniers. Ainsi la différence des logarithmes ou des distances des deux premiers nombres à l'origine, ne sera pas égale à la différence des logarithmes ou des distances des deux derniers nombres à l'origine : d'où il suit que les logarithmes de ces quatre nombres ne seront pas en proportion arithmétique.

Corollaire II.

211 Donc si quatre logarithmes sont en proportion arithmétique, les quatre nombres auxquels ils appartiendront seront en proportion géométrique.

Car (N°. 210.) si ces quatre nombres n'étoient point en proportion géométrique, leurs logarithmes ne seroient pas en proportion arithmétique.

Corollaire III.

212 Lorsque quatre nombres seront en proportion géométrique ; la somme des logarithmes des extrêmes, sera égale à la somme des logarithmes des moyens.

Car lorsque quatre nombres seront en proportion géométrique, leurs logarithmes seront en proportion arithmétique (N°. 209.). Mais (N°. 173.) dans toute proportion arithmétique la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens. Donc si quatre nombres sont en proportion géométrique, la somme des logarithmes des extrêmes sera égale à la somme des logarithmes des moyens.

COROLLAIRE IV.

213 Il ſuit du dernier Corollaire, que ſi l'unité eſt le premier terme d'une proportion géométrique, le logarithme du quatriéme terme ſera égal à la ſomme des logarithmes des deux termes moyens.

Car le premier terme de la proportion géométrique étant l'unité, ſon logarithme ſera o (N°. 201.). Ainſi la ſomme des logarithmes des extrêmes, qui eſt égale à la ſomme des logarithmes des moyens (N°. 212.), ſe réduira au logarithme du quatriéme terme.

COROLLAIRE V.

214 Lorſque trois nombres ſont en proportion géométrique continue, la ſomme des logarithmes des extrêmes, eſt égale au double du logarithme du terme moyen.

Car ſi l'on écrit deux fois de ſuite le terme moyen d'une proportion géométrique continue, pour en faire une proportion géométrique dont les deux moyens ſoient égaux; les logarithmes des quatre termes de cette proportion, feront une proportion arithmétique dont les deux moyens ſeront auſſi égaux. Ainſi la ſomme des logarithmes extrêmes, étant égale (N°. 212.) à la ſomme des logarithmes moyens qui ſont égaux, ſera double de l'un de ces logarithmes moyens; & par conſéquent l'on aura le logarithme du terme moyen d'une proportion géométrique continue, en prenant la moitié de la ſomme des logarithmes des extrêmes.

Comme o eſt le logarithme de l'unité; lorſque l'unité ſera l'un des extrêmes d'une proportion géométrique continue, la ſomme des logarithmes des extrêmes ſe réduira au logarithme de l'extrême

qui ne ſera pas l'unité. Ainſi le logarithme de cet extrême ſera double du logarithme du terme moyen; & par conſéquent l'on aura le logarithme du terme moyen d'une proportion géométrique continue dont l'unité eſt le premier terme, en prenant la moitié du logarithme du troiſiéme terme.

DE L'USAGE DES LOGARITHMES DANS L'ARITHMÉTIQUE.

Par le moyen des logarithmes, on peut abréger conſidérablement les opérations de l'Arithmétique, lorſqu'on a des Tables aſſez étendues.

1°. On réduit la Multiplication à une Addition.

2°. On réduit la Diviſion à une ſimple Souſtraction.

3°. La Regle de Trois, qui demande une multiplication & une diviſion, ſe fait par une addition & une ſouſtraction.

4°. L'Élévation d'un nombre au Quarré ou au Cube, ou à d'autres Puiſſances, ſe réduit à une ſimple multiplication par 2 ou par 3, ou par un autre nombre.

5°. L'Extraction des Racines quarrées ou cubiques, & celles des Racines de toute autre eſpéce, ſe réduit à une ſimple diviſion par 2 ou par 3, ou par un autre nombre.

Nous allons expliquer toutes ces opérations; & la Table qu'on vient de voir, quoique très-bornée, nous ſuffira pour en donner des exemples.

I.

215 *Si l'on veut avoir le produit de deux nombres quelconques,*

On joûtera le logarithme du multiplicande avec celui du multiplicateur; & la ſomme ſera le loga-

rithme du produit. Ainſi en cherchant ce dernier logarithme dans la Table, on trouvera à ſa gauche le produit demandé.

Car (N°. 16.) le produit d'une multiplication étant compoſé du multiplicande répété autant de fois, qu'il y a d'unités dans le multiplicateur ; il eſt clair (N°. 102.) que l'unité, le multiplicateur, le multiplicande & le produit, ſont en proportion géométrique. Ainſi (N°. 213.) le logarithme du produit qui eſt le quatriéme terme, eſt égal à la ſomme des logarithmes des deux moyens qui ſont le multiplicande & le multiplicateur.

Par exemple ſi l'on veut avoir le produit de 15 multiplié par 13,

On prendra dans la Table le logarithme de 15, ſavoir	1, 1760913
Et le logarithme de 13, ſavoir	1, 1139434
Additionnant ces deux logarithmes, on aura pour logarithme du produit la ſomme	2, 2900347

Cherchant enſuite ce logarithme dans la Table, on trouvera à ſa gauche 195 pour le produit demandé de 15 multiplié par 13.

II.

216 *Si l'on veut avoir le quotient d'une Diviſion.*

On ſouſtraira le logarithme du diviſeur, du logarithme du dividende ; & le reſte ſera le logarithme du quotient.

Ainſi en cherchant dans la Table ce dernier logarithme, on trouvera à ſa gauche le quotient demandé.

Car (N°. 28.) le diviſeur multiplié par le quotient, donnant un produit égal au dividende ; la ſomme des logarithmes du diviſeur & du quotient, ſera égale au logarithme du dividende (N°. 215.). Ainſi en retranchant de part & d'autre le logarithme du diviſeur, le logarithme du quotient ſera égal à ce qui reſtera du logarithme du dividende, après en avoir retranché le logarithme du diviſeur.

Par exemple ſi l'on veut avoir le quotient de 195 diviſé par 13,

On prendra le logarithme de 195, ſavoir	2, 2900346
Et le logarithme de 13, ſavoir	1, 1139433
Retranchant le ſecond du premier, on aura pour logarithme du quotient le reſte	1, 1760913

Cherchant enſuite ce logarithme dans la Table, on trouvera à ſa gauche 15 pour le quotient de 195 diviſé par 13.

III.

217 *Si l'on veut avoir le quatriéme terme d'une Regle de Trois,*

On ajoûtera le logarithme du ſecond terme avec celui du troiſiéme ; & de leur ſomme ayant retranché le logarithme du premier terme, le reſte ſera le logarithme du quatriéme terme. Ainſi en cherchant ce logarithme dans la Table, on trouvera à côté le quatriéme terme demandé.

Car les trois premiers termes donnés de la Regle de Trois, & le quatriéme terme qu'on cherche, étant en proportion géométrique, leurs logarithmes ſont en proportion arithmétique. Ainſi (N°. 176.) ſi de la

ſomme des moyens qui ſont les logarithmes du ſecond & du troiſiéme termes de la Regle de Trois, on retranche le premier extrême qui eſt le logarithme du premier terme de la même regle ; le reſte ſera le ſecond extrême ou le logarithme du quatriéme terme de la Regle de Trois.

Par exemple ſi l'on veut avoir le quatriéme terme de cette Regle de Trois 125 : 150 : : 165 : *,

On prendra le logarithme de 150, ſavoir	2, 1760913
Et celui de 165, ſavoir	2, 2174839
Puis de leur ſomme	4, 3935752
Retranchant le logarithme de 125, ſavoir	2, 0969100
On aura pour logarithme du quatriéme terme, le reſte	2, 2966652

Enfin cherchant ce logarithme dans la Table, on trouvera à ſa gauche 198 pour le quatriéme terme demandé.

IV.

218 1°. *Si l'on veut avoir le Quarré d'un nombre quelconque,*

On multipliera le logarithme de ce nombre par 2 ; & le produit ſera le logarithme du quarré demandé. Ainſi en cherchant dans la Table ce dernier logarithme, on trouvera à ſa gauche le quarré qu'on veut avoir.

Car (N°. 127.) pour quarrer un nombre, il faut le multiplier par lui-même. Ainſi (N°. 215.) il faut ajoûter ſon logarithme à lui-même, ou le doubler, pour avoir le logarithme de ſon quarré.

Par exemple ſi l'on veut avoir le quarré de 11;

On prendra le logarithme de 11, ſavoir 1,0413927

Et multipliant ce logarithme par 2

On aura pour le logarithme du quarré, le produit 2,0827854

Cherchant enſuite ce logarithme dans la Table, on trouvera à ſa gauche 121 pour le quarré du nombre 11.

2°. *Si l'on veut avoir le Cube d'un nombre quelconque,*

On multipliera le logarithme de ce nombre par 3; & le produit ſera le logarithme du cube demandé. Ainſi en cherchant dans la Table ce dernier logarithme, on trouvera à ſa gauche le cube qu'on veut avoir.

Car pour cuber un nombre, il faut le multiplier par ſon quarré. Ainſi (N°. 215.) pour avoir le logarithme de ſon cube, il faut ajoûter le logarithme de ce nombre à celui de ſon quarré.

Mais le logarithme du quarré d'un nombre eſt double du logarithme de ce nombre.

Donc pour avoir le logarithme du cube d'un nombre, il faut ajoûter le logarithme de ce nombre avec le double de ce logarithme; c'eſt-à-dire qu'il faut tripler ou multiplier par 3 le logarithme de ce nombre.

Par exemple ſi l'on veut avoir le cube de 5,

On prendra le logarithme de 5, ſavoir 0,6989700

Et multipliant ce logarithme par 3

On aura pour le logarithme du cube qu'on cherche, le produit 2,0969100

Cherchant enſuite ce logarithme dans la Table, on trouvera à ſa gauche 125 pour le cube de 5.

Il eſt évident que ſi l'on vouloit le produit de quatre ou cinq ou ſix ou ſept &c nombres égaux multipliés enſemble, il faudroit multiplier par 4 ou 5 ou 6 ou 7 &c. le logarithme de l'un des facteurs égaux ; & que le logarithme réſultant de cette multiplication ſeroit le logarithme du produit demandé. Ainſi en cherchant ce logarithme dans les Tables, on trouveroit à ſa droite le produit de tous ces nombres égaux multipliés enſemble.

Le produit de pluſieurs nombres égaux multipliés enſemble, s'appelle en général Puiſſance *de l'un de ces nombres ; & pour déſigner qu'un produit eſt compoſé de deux ou trois ou quatre ou cinq ou ſix &c facteurs égaux, on le nomme* Puiſſance 2e *ou* 3e *ou* 4e *ou* 5e *ou* 6e &c *de l'un de ſes facteurs égaux : en ſorte qu'un* Quarré *& un* Cube *ſont la* ſeconde *& la* troiſiéme Puiſſances *de leurs racines.*

V.

219 1°. *Si l'on veut avoir la Racine quarrée d'un nombre,*

On diviſera le logarithme de ce nombre par 2 ; & le quotient ſera le logarithme de la racine quarrée demandée. Ainſi en cherchant dans la Table ce dernier logarithme, on trouvera à ſa gauche la racine quarrée qu'on veut avoir.

Car il eſt évident qu'un nombre eſt le quarré de ſa racine quarrée. Ainſi (N°. 218.) le logarithme d'un nombre eſt double du logarithme de ſa racine quarrée ; & par conſéquent ſi l'on prend la moitié du logarithme de ce nombre, on aura le logarithme de ſa racine quarrée.

Par exemple ſi l'on veut avoir la racine quarrée du nombre 121,

On prendra le logarithme de 121, ſavoir 2,0827854

Et diviſant ce logarithme par 2

On aura pour le logarithme de la racine quarrée que l'on cherche, le quotient 1,0413927

Cherchant enſuite ce logarithme dans la Table, on trouvera à ſa gauche 11 pour la racine quarrée de 121.

2°. *Si l'on veut avoir la Racine cubique d'un nombre,*

On diviſera le logarithme de ce nombre par 3 & le quotient ſera le logarithme de la racine cubique demandée.

Car un nombre eſt le cube de ſa racine cubique. Ainſi (N°. 218.) le logarithme d'un nombre eſt triple de celui de ſa racine cubique; & par conſéquent ſi l'on diviſe par 3 le logarithme de ce nombre, on aura le logarithme de ſa racine cubique.

Par exemple ſi l'on veut avoir la racine cubique de 125,

On prendra le logarithme de 125, ſavoir 2,0969100

Et diviſant ce logarithme par 3

On aura pour le logarithme de la racine cubique que l'on cherche, le quotient 0,6989700

Cherchant enſuite ce logarithme dans la Table, on trouvera à ſa gauche 5 pour la racine cubique du nombre propoſé 125.

Comme les racines quarrées ſont deux fois facteurs dans leurs quarrés, & que les racines cubiques ſont trois fois facteurs dans leurs cubes; ces deux eſpeces de racines ſe nomment auſſi Racines ſecondes & Racines troiſiémes.

Par la même raiſon, lorſqu'un nombre eſt compoſé par la multiplication de 4 ou 5 ou 6 ou 7 &c facteurs égaux, un des facteurs s'appelle Racine quatriéme *ou* cinquiéme *ou* ſixiéme *ou* ſeptiéme &c *de ce nombre.*

Si l'on veut avoir la racine quatriéme ou cinquiéme, ou ſixiéme ou ſeptiéme &c d'un nombre propoſé quelconque; il ſuit évidemment de ce que nous avons dit des racines quarrées & cubiques, qu'en diviſant le logarithme de ce nombre par 4, ou par 5, ou par 6, ou par 7 &c, on aura le logarithme de la racine demandée du nombre propoſé.

DE LA CONSTRUCTION DES TABLES DE LOGARITHMES.

220 Lorſqu'on a une Table de logarithmes à conſtruire, il faut commencer par choiſir le ſyſtême ſelon lequel on veut qu'elle ſoit compoſée. Pour donner une idée de la méthode qu'on peut ſuivre pour calculer ces ſortes de Tables, nous choiſirons le ſyſtême du Baron de Neper & de Brigge qui ont pris les termes de la progreſſion arithmétique ∴ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . &c, pour les logarithmes des termes correſpondans de la progreſſion géométrique décuple ∷ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c.

La progreſſion ∷ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c dans laquelle on veut renfermer tous les nombres, étant choiſie avec les logarithmes ∴ 0. 1. 2. 3. 4. &c de ſes termes; on procéde au calcul des nombres intermédiaires aux termes de la progreſſion géométrique; mais on ne calcule point indiſtinctement par

la même méthode les logarithmes de tous ces nombres ; & l'on diſtingue les nombres ſimples des nombres compoſés.

On appelle *Nombres ſimples* tous ceux qui ne peuvent pas être compoſés de la multiplication de deux autres nombres. Il faut une méthode particuliere & un calcul long & pénible pour trouver les logarithmes de ces eſpéces de nombres. Il y a quatre de ces nombres ſimples entre les deux premiers termes 1 & 10 de la progreſſion géométrique, ſavoir 2, 3, 5, 7 ; il y en a 21 entre le ſecond terme 10 & le troiſiéme 100 de la même progreſſion ; & il y en a beaucoup plus entre les autres termes.

On appelle *Nombres compoſés* ceux qui ſont le produit de la multiplication de deux ou de pluſieurs autres nombres. Les logarithmes de ces nombres ſont aiſés à trouver (N°. 215.), quand on a ceux des nombres dont ils ſont compoſés.

Il eſt quelquefois plus commode de chercher des logarithmes de nombres compoſés, pour en déduire ceux des nombres ſimples qu'ils renferment. Par exemple au lieu de chercher directement les logarithmes des nombres ſimples 3, 2, &c, on cherche les logarithmes de leurs quarrés ou de leurs cubes ; & au lieu de chercher le logarithme de 5, on cherche le logarithme de 2 qu'on retranche de celui de 10 ; ce qui donne (N°. 216.) le logarithme de 5.

Il y a deux méthodes pour calculer directement les logarithmes des nombres. La premiere, qui conſiſte dans des extractions de racines quarrées, eſt facile à entendre, & porte avec elle ſa démonſtration ; mais elle eſt très-difficile dans la pratique, & demande de longs calculs qui expoſent à de fréquentes erreurs. La ſeconde, qui conſiſte dans de ſimples diviſions, eſt beaucoup plus expéditive, & exige peu

d'opérations; mais la démonſtration en étant difficile, & ſuppoſant des connoiſſances qu'on ne peut pas donner dans des Élémens d'Arithmétique, nous la réſervons pour un autre Traité. Nous allons expliquer ces deux méthodes dans les Problêmes ſuivans.

PROBLÉME.

221 *Trouver le logarithme du nombre* 3, *ou du moins en approcher juſqu'à* 7 *chiffres décimaux, de maniere que le logarithme qu'on aura, ne différe pas du logarithme de* 3, *d'une unité décimale du ſeptiéme ordre.*

1°. Le nombre 3 dont on demande le logarithme, ſera quelqu'un des termes d'une progreſſion géométrique dont 1 & 10 ſont les extrêmes. Quelle que ſoit cette progreſſion géométrique, la diſtance de ſon origine 1 à ſon terme du milieu, ne ſera que la moitié de la diſtance de la même origine à l'extrême 10; & comme on a pris 1 pour la diſtance de 1 à 10, ou pour le logarithme de 10, la diſtance de l'origine au terme du milieu; c'eſt-à-dire le logarithme du terme du milieu, ne ſera que $\frac{1}{2}$ qu'on repréſentera par 0, 5.

Le terme du milieu de la progreſſion géométrique étant également éloigné des extrêmes 1 & 10; ces trois termes, le premier 1, le terme du milieu & le dernier 10, feront une proportion géométrique continue; en ſorte que (N°. 194.) le terme du milieu ſera la racine quarrée du produit 1×10 ou 10 des extrêmes. On prendra donc la racine quarrée de 10; & pouſſant cette racine quarrée juſqu'au huitiéme chiffre décimal, pour être plus sûr du ſeptiéme; on aura le nombre 3, 16227766 dont le logarithme ou la diſtance à l'unité, ſera 0, 5.

2°. Le nombre 3,16227766 qu'on vient de trouver, étant plus grand que le nombre 3 dont on veut avoir le logarithme, & ſon logarithme 0,5 étant par conſéquent plus grand que celui qu'on demande; on cherchera un nouveau nombre qui ſoit le moyen d'une proportion géométrique continue dont l'origine 1 & 3,16227766 ſoient les extrêmes; & comme la diſtance de l'origine 1 à ce terme moyen, ne ſera que la moitié de la diſtance 0,5 de la même origine à l'extrême 3,16227766; le logarithme de ce terme moyen ſera 0,25.

Le terme moyen de la proportion géométrique continue qui aura 1 & 3,16227766 pour extrêmes, ſera la racine quarrée de 1 × 3,16227766 produit des extrêmes. Ainſi on prendra la racine quarrée de 3,16227766; & pouſſant l'opération juſqu'au huitiéme chiffre décimal, on trouvera pour le terme moyen 1,77827941 dont le logarithme ou la diſtance à l'origine, ſera 0,25.

3°. Comme le nombre 3 dont on veut avoir le logarithme, eſt plus grand que le ſecond moyen 1,77827941 qu'on vient de trouver, & plus petit que le moyen précédent 3,16227766; on cherchera un nouveau nombre qui ſoit moyen géométrique entre ces deux premiers moyens: & comme la diſtance de l'origine à ce troiſiéme moyen, ſera la moitié de la ſomme des diſtances 0,5 & 0,25 de l'origine aux deux premiers moyens; le logarithme de ce troiſiéme moyen ſera 0,375.

Le terme moyen géométrique entre les deux premiers moyens 3,16227766 & 1,77827941, ſera la racine quarrée du produit de ces deux nombres. On multipliera donc ces deux nombres, l'un par l'autre, & de leur produit 5,623413251480980 6, on extraira la racine quarrée qu'on trouvera de

2, 37137370 dont la diſtance à l'origine 1 ou le logarithme 1, ſera 0, 375.

4°. Comme le nombre 3 eſt encore plus grand que ce nouveau terme 2,37137370 dont le logarithme eſt 0,375, & plus petit que le premier moyen 3,16227766 dont le logarithme eſt 0, 5; on cherchera un quatriéme moyen géométrique entre ces deux nombres, en faiſant leur produit 7,49894207 5021 5420, puis en tirant de ce produit la racine quarrée qu'on trouvera de 2,73841962.

Enſuite on prendra un moyen arithmétique entre les logarithmes 0,375 & 0,5; & ce moyen 0,4375 ſera la diſtance de l'origine de la progreſſion géométrique, au terme 2,73841962, & ſera par conſéquent ſon logarithme.

5°. Comme le nombre 3 eſt encore plus grand que le nouveau terme 2,73841962 dont le logarithme eſt 0,4375, & plus petit que le premier moyen 3,16227766 dont le logarithme eſt 0,5; on fera le produit 8,65964318803 16892 de ces deux termes, & l'on en tirera la racine quarrée 2,94272717 qui aura pour logarithme 0,46875 moyen arithmétique entre 0,4375 & 0,5.

6°. Le nombre 3 étant encore plus grand que le dernier terme 2,94272717 qu'on vient de trouver, dont le logarithme eſt 0,46875, & plus petit que le premier moyen 3, 16227766 dont le logarithme eſt 0, 5; on multipliera ces deux termes l'un par l'autre, & du produit 9, 30572038 91660222, on tirera la racine quarrée 3, 05052789 qui aura pour logarithme 0, 484375 moyen arithmétique entre 0, 46875 & 0, 5.

On continuera de chercher de la même maniere de nouveaux termes moyens proportionnels géométriques entre deux nombres dont l'un ſera plus grand

& l'autre plus petit que 3, ſavoir entre le dernier nombre trouvé & l'un des précédens que l'on choiſira le plus approchant au-deſſus ou au-deſſous de 3, ſuivant que le dernier nombre trouvé ſera au contraire au-deſſous ou au-deſſus de 3 ; & pour avoir les logarithmes de ces moyens géométriques, l'on prendra en même temps des logarithmes moyens arithmétiques entre les logarithmes des nombres entre leſquels on aura pris des termes moyens géométriques.

Lorſqu'on aura fait 26 de ces opérations, l'on trouvera un terme moyen géométrique égal à 3, ou qui n'en différera pas d'une unité décimale du huitiéme ordre ; & le 26e terme moyen arithmétique correſpondant à ce 26e terme moyen géométrique, ſera le logarithme de 3.

On verra dans la Table ſuivante les vingt-ſix moyens géométriques, & les vingt-ſix moyens arithmétiques correſpondans, avec les extrêmes entre leſquels ces moyens ſont pris. Chaque moyen s'y trouve placé entre ſes extrêmes ; & pour indiquer l'ordre des opérations, on a cotté A & B les deux premiers extrêmes 1 & 10 entre leſquels on a pris le premier moyen qu'on a cotté C : les autres moyens ſont déſignés par les lettres ſuivantes de l'Alphabet.

On pourra trouver par cette méthode les logarithmes de tous les nombres, en cherchant des moyens geometriques entre 1 *&* 10, *pour les nombres moindres que* 10 ; *entre* 10 *&* 100, *pour les nombres moindres que* 100 *& plus grands que* 10 ; *entre* 100 *&* 1000, *pour les nombres moindres que* 1000 *& plus grands que* 100, *&c : & en prenant en même temps des moyens arithmetiques correſpondans entre* 0 *&* 1, *entre* 1 *&* 2, *entre* 2 *&* 3, *&c.*

Nombres en Proportion géométrique continue.		*Logarithmes.*	*Nombres en Proportion géometrique continue.*		*Logarithmes.*
A	1,00000000	0,00000000	P	3,00035655	0,47717285
C	3,16227766	0,50000000	Q	2,99993491	0,47711182
B	10,00000000	1,00000000	N	2,99951334	0,47705078
A	1,00000000	0,00000000	Q	2,99993491	0,47711182
D	1,77827941	0,25000000	R	3,00014572	0,47714233
C	3,16227766	0,50000000	P	3,00035655	0,47717285
D	1,77827941	0,25000000	R	3,00014572	0,47714233
E	2,37137370	0,37500000	S	3,00004031	0,47712708
C	3,16227766	0,50000000	Q	2,99993491	0,47711182
E	2,37137370	0,37500000	S	3,00004031	0,47712708
F	2,73841962	0,43750000	T	2,99998751	0,47711945
C	3,16227766	0,50000000	Q	2,99993491	0,47711182
F	2,73841962	0,43750000	T	2,99998751	0,47711945
G	2,94272717	0,46875000	U	3,00001390	0,47712326
C	3,16227766	0,50000000	S	3,00004031	0,47712708
G	2,94272717	0,46875000	U	3,00001390	0,47712326
H	3,05052789	0,48437500	X	3,00000070	0,47712135
C	3,16227766	0,50000000	T	2,99998751	0,47711945
H	3,05052789	0,48437500	X	3,00000070	0,47712135
I	2,99614286	0,47656250	Y	2,99999410	0,47712040
G	2,94272717	0,46875000	T	2,99998751	0,47711945
I	2,99614286	0,47656250	Y	2,99999410	0,47712040
K	3,02321308	0,48046875	Z	2,99999739	0,47712088
H	3,05052789	0,48437500	X	3,00000070	0,47712135
K	3,02321308	0,48046875	Z	2,99999739	0,47712088
L	3,00964753	0,47851563	AA	2,99999908	0,47712112
I	2,99614286	0,47656250	X	3,00000070	0,47712135
L	3,00964753	0,47851563	AA	2,99999908	0,47712112
M	3,00288762	0,47753906	BB	2,99999989	0,47712123
I	2,99614286	0,47656250	X	3,00000070	0,47712135
M	3,00288762	0,47753906	BB	2,99999989	0,47712123
N	2,99951334	0,47705078	CC	3,00000029	0,47712129
I	2,99614286	0,47656250	X	3,00000070	0,47712135
N	2,99951334	0,47705078	CC	3,00000029	0,47712129
O	3,00120000	0,47729492	DD	3,00000009	0,47712126
M	3,00288762	0,47753906	BB	2,99999989	0,47712123
O	3,00120000	0,47729492	DD	3,00000009	0,47712126
P	3,00035655	0,47717285	EE	3,00000000	0,47712125
N	2,99951334	0,47705078	BB	2,99999989	0,47712123

PROBLÊME.

222 *Trouver le logarithme d'une fraction dont le numérateur ſurpaſſe le dénominateur d'une unité, & pouſſer le calcul juſqu'à ce que le logarithme contienne dix chiffres décimaux.*

1°. On diviſera le nombre 0,8685889638 par la ſomme du numérateur & du dénominateur de la fraction dont on veut avoir le logarithme ; puis on diviſera ce premier quotient par le quarré de la ſomme du numérateur & du dénominateur ; & l'on continuera de diviſer le nouveau quotient par ce même quarré, juſqu'à ce qu'on ait un quotient moindre que le quarré par lequel on diviſe.

2°. Enſuite on ajoûtera enſemble le premier quotient, le tiers du ſecond, le cinquiéme du troiſiéme, le ſeptiéme du quatriéme, le neuviéme du cinquiéme &c ; & la ſomme ſera le logarithme de la fraction.

EXEMPLE PREMIER.

223 *On demande le logarithme de la fraction* $\frac{11}{10}$.

1°. On diviſera le nombre 0,8685889638 par la ſomme 21 du numérateur & du dénominateur de la fraction propoſée $\frac{11}{10}$; ce qui donnera ce premier quotient 0,0413613792.

2°. Enſuite on diviſera le premier quotient 0,0413613792 par le quarré 441 de la ſomme 21 ; ce qui donnera pour le ſecond quotient 0,0000937899 dont le tiers eſt 0,0000312633.

3°. On diviſera le ſecond quotient 0,0000937899 par le même quarré 441 ; ce qui donnera pour le troiſiéme quotient 0,0000002126 dont la cinquiéme partie ſera 0,0000000425.

4°. On

4°. On diviſera le 3e quotient 0,0000002126 par le même quarré 441 ; ce qui donnera 0,0000000005 pour le troiſiéme quotient, qui ſera le dernier ; parce qu'il eſt moindre que le diviſeur 441 : & le ſeptiéme de ce dernier quotient ſera 0,0000000001.

5°. Additionnant enſemble le premier quotient 0,0413613792, le tiers 0,0000312633 du ſecond, le cinquiéme 0,0000000425 du troiſiéme, le ſeptiéme 0,0000000001 du 4e, la ſomme 0,0413926851, ſera le logarithme de la fraction propoſée $\frac{11}{10}$.

Exemple II.

224 *On demande le logarithme de la fraction* $\frac{10}{9}$.

1°. On diviſera le nombre 0,868588963 8 par 19 ſomme du numérateur & du dénominateur de la fraction propoſée $\frac{10}{9}$; & l'on aura 0,045715 2086 pour le premier quotient.

2°. On diviſera ce premier quotient 0,045715 2086 par 361 quarré de 19 ; & l'on aura 0,0001266349 pour le 2e quotient, dont le tiers ſera 0,0000422116 & un peu plus.

3°. On diviſera le ſecond quotient 0,0001266349 par le même quarré 361 ; & l'on aura 0,0000003508 pour le troiſiéme quotient, dont le cinquiéme ſera 0,0000000702.

4°. On diviſera le 3e quotient 0,0000003508 par le même quarré 361 ; & l'on aura 0,0000000010 pour le quatriéme quotient, dont le ſeptiéme ſera moindre que 2.

5°. Enfin on ajoûtera enſemble le premier quotient, le tiers du ſecond, le cinquiéme du troiſiéme, le ſeptiéme du quatriéme ; & la ſomme un peu moindre que 0,0457574906, ſera le logarithme de la fraction propoſée $\frac{10}{9}$.

Exemple III.

225 *On demande le logarithme de la fraction* $\frac{2}{5}$.

1°. On diviſera le nombre 0,868588963 8 par 17 ſomme du numérateur & du dénominateur de la fraction $\frac{2}{5}$; & l'on aura 0,0510934685 pour le premier quotient.

2°. On diviſera ce premier quotient par 289 quarré de 17; & l'on aura 0,0001767940 pour le ſecond quotient, dont le tiers ſera 0,0000589313 & un peu plus.

3°. On diviſera le ſecond quotient 0,0001767940 par le même quarré 289; & l'on aura 0,0000006117 pour le troiſiéme quotient, dont la cinquiéme partie ſera 0,0000001223 & un peu plus.

4°. On diviſera le 3e quotient 0,0000006117 par le même quarré 289; & l'on aura 0,0000000021 pour le quatriéme quotient, dont la ſeptiéme partie ſera 0,0000000003.

5°. Enfin l'on ajoûtera enſemble le premier quotient, le tiers du ſecond, la cinquiéme partie du troiſiéme, la ſeptiéme partie du quatriéme; & la ſomme 0,0511525224 ſera le logarithme de la fraction propoſée $\frac{2}{5}$.

Exemple IV.

226 *On demande le logarithme de la fraction* $\frac{8}{7}$.

1°. On diviſera le nombre 0,8685889638 par 15 ſomme du numérateur & du dénominateur de la fraction $\frac{8}{7}$; & l'on aura 0,0579059309 & un peu plus pour le premier quotient.

2°. On diviſera ce 1er quotient 0,0579059309 par le quarré 225 de 15; ce qui donnera pour le ſecond quotient 0,0002573597 dont le tiers ſera 0,0000857866.

3°. On diviſera par le même quarré 225 le ſecond quotient 0,0002573597; ce qui donnera pour le troiſiéme quotient 0,0000011438 dont la cinquiéme partie ſera 0,0000002288 ou un peu moins.

4°. On diviſera ce 3e quotient 0,0000011438 par le même quarré 225; & l'on aura ce dernier quotient 0,0000000051 dont la ſéptiéme partie ſera 0,0000000007 & un peu plus.

5°. Enfin on ajoûtera enſemble le premier quotient, le tiers du ſecond, la cinquiéme partie du troiſiéme, la ſeptiéme partie du quatriéme; & la ſomme 0,0579919470 ſera le logarithme de la fraction propoſée $\frac{5}{7}$.

PROBLÉME.

227 *Connoiſſant le logarithme d'une fraction, & celui de l'un de ſes termes, trouver le logarithme de l'autre terme.*

2°. Le logarithme de la fraction étant donné; ſi l'on connoît le logarithme du dénominateur, on ajoûtera ce dernier logarithme avec celui de la fraction; & la ſomme ſera le logarithme du numérateur.

2°. Le logarithme d'une fraction étant donné; ſi l'on connoît le logarithme du numérateur, on retranchera le logarithme de la fraction de celui de ſon numérateur; & le reſte ſera le logarithme du dénominateur.

Car (N°. 53.) une fraction eſt le quotient de la diviſion de ſon numérateur par ſon dénominateur. Ainſi (N°. 216.) le logarithme d'une fraction, eſt égal au logarithme de ſon numérateur moins celui de ſon dénominateur; & par conſéquent 1°. ſi l'on ajoûte le logarithme du dénominateur à celui de la

fraction, la ſomme ſera égale au logarithme du numérateur de la même fraction. Ce qu'il falloit premiérement prouver.

Pour démontrer 2°. qu'on trouve le logarithme du dénominateur d'une fraction, en retranchant le logarithme de cette fraction, de celui de ſon numérateur; il ſuffit (N°. 216.) de faire voir que ſi l'on diviſe le numérateur d'une fraction, par cette fraction, le quotient ſera égal au dénominateur de la même fraction. Or pour diviſer le numérateur d'une fraction par cette fraction, on ſçait (N°. 71.) qu'il faut d'abord le diviſer par le numérateur de la fraction, c'eſt-à-dire le diviſer par lui-même; ce qui donne 1 pour quotient; enſuite il faut multiplier ce premier quotient 1 par le dénominateur; ce qui produit le dénominateur lui-même: ce qu'il falloit prouver.

EXEMPLES.

228 1°. On ſait que le logarithme de 10 eſt 1, ou 1,0000000000

Et (N°. 223.) que le logarithme de $\frac{11}{10}$ eſt 0,0413926851

Le logarithme de 11, ſera donc égal à la ſomme 1,0413926851

2°. On ſait que le logarithme de 10 eſt 1, ou 1,0000000000

Et (N°. 224.) que le logarithme de $\frac{10}{9}$ eſt 0,0457574906

Retranchant le logarithme de $\frac{10}{9}$, du logarithme de 10: le logarithme de 9, ſera égal au reſte 0,9542425094

3°. On vient de voir que le logarithme de 9 eſt 0,9542425094

Et l'on ſçait (N°. 225.) que le logarithme de $\frac{9}{8}$ eſt 0,0511525224

Retranchant le logarithme de $\frac{9}{8}$, du logarithme de 9; le logarithme de 8, ſera égal au reſte 0,9030899870

4°. On vient de trouver que le logarithme de 8 eſt 0,9030899870

Et (N°. 226.) celui de $\frac{8}{7}$ eſt 0,0579919470

Retranchant le logarithme de $\frac{8}{7}$, du logarithme de 8, le logarithme de 7 ſera égal au reſte 0,8450980400

PROBLÉME.

229 *Conſtruire une Table de logarithmes, en ſuppoſant que les logarithmes des termes de la progreſſion géométrique décuple* $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c, *ſont* $\frac{\cdot}{\cdot}$ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . &c.

1°. On cherchera, comme nous avons fait (N°. 224. 225. 226.), les logarithmes des fractions $\frac{10}{9}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{8}{7}$.

Comme on ſçait que l'unité eſt le logarithme du numérateur de la premiere de ces fractions, on trouvera d'abord (N°. 228.) que le logarithme de 9 eſt 0,9542425094.

Ayant trouvé le logarithme de 9 & celui de la fraction $\frac{9}{8}$, on aura (N°. 228.) 0,9030899870 pour le logarithme de 8.

Le logarithme de 8 & celui de la fraction $\frac{8}{7}$ étant trouvés, on aura (N°. 228.) 0,8450980400 pour le logarithme de 7.

2°. Le nombre 2 étant la racine cubique de 8 dont on a le logarithme; en diviſant le logarithme de 8 par 3, le quotient 0,3010299957 ſera (N°. 219) le logarithme de 2.

Le nombre 4 étant le quarré de 2 dont on vient de trouver le logarithme; en multipliant le logarithme de 2 par 2, le produit 0,6020599913 ſera (N°. 218.) le logarithme de 4.

3°. Le nombre 9 dont on a le logarithme étant le quarré de 3; ſi l'on diviſe le logarithme de 9 par 2, le quotient 0,4771212547 ſera (N°. 219.) le logarithme de 3.

4°. Le nombre 5 étant le quotient de la diviſion de 10 par 2, dont on a les logarithmes; en retranchant le logarithme de 2, du logarithme de 10, on aura (N°. 216.) 0,6989700043 pour le logarithme de 5.

5°. Le nombre 6 étant le produit de 3 multiplié par 2, dont on a les logarithmes; en ajoûtant le logarithme de 2 à celui de 3, la ſomme 0,7781512504 ſera (N°. 215.) le logarithme de 6.

Ainſi les nombres	1	ont pour logarithmes	0,0000000000
	2		0,3010299957
	3		0,4771212547
	4		0,6020599913
	5		0,6989700043
	6		0,7781512504
	7		0,8450980400
	8		0,9030899870
	9		0,9542425094
	10		1,0000000000

Les logarithmes de tous les nombres depuis 1 juſqu'à 10 étant trouvés, on cherchera les logarithmes des nombres qui ſont entre 10 & 100.

Le premier de ces nombres, 11, étant un nombre ſimple; on cherchera (N°. 223.) le logarithme de la fraction $\frac{11}{10}$: & ajoûtant à ce logarithme le logarithme de 10, on trouvera (N°. 228.) 1,041392685 1 pour le logarithme de 11.

Le nombre ſuivant 12 étant le produit de la multiplication de 6 par 2, ou de 4 par 3; en ajoûtant enſemble les logarithmes de 6 & de 2, ou ceux de 4 & de 3, la ſomme ſera le logarithme de 12.

On trouvera de la même maniere les logarithmes de tous les autres nombres, ſoit en additionnant les logarithmes des nombres dont ils ſont compoſés, ſoit en prenant le logarithme d'une fraction qui aura pour numérateur le nombre dont on voudra avoir le logarithme, & qui aura pour dénominateur un nombre plus petit d'une unité, dont on ſuppoſe le logarithme trouvé.

On a pouſſé le calcul des logarithmes juſqu'à dix chiffres décimaux dans les articles 223 *& ſuivans; parce que la méthode qu'on a ſuivie dans ces articles eſt ſi prompte, qu'il n'en coûte guére plus de peine pour les calculer juſqu'à dix décimales, que juſqu'à ſept. Au reſte quoique les logarithmes qu'on a donnés ſoient aſſez juſtes, pour qu'on ne puiſſe point y ajoûter ni en retrancher une unité décimale du dixiéme ordre, ſans les rendre trop grands ou trop petits; il ne faudroit pas ſe flatter que tous les dix chiffres décimaux ſeroient toûjours bons, ſi l'on continuoit la Table commencée. Ainſi lorſqu'on auroit trouvé tous les logarithmes dont on auroit beſoin, il faudroit ſupprimer le dixiéme chiffre décimal, & ajoûter une unité au neuviéme, lorſque le dixiéme ſeroit* 5 *ou plus grand que* 5.

On demandera ſans doute à quoi répond, & comment on trouve le nombre conſtant 0,868588963 8, qui ſert de baſe aux logarithmes que nous avons trouvés. Mais comme la ſeconde méthode dans la-

quelle nous avons fait uſage de ce nombre, ne peut pas être démontrée ſans ſuppoſer des principes qu'on ne peut point expliquer dans ces Elémens, on n'en ſeroit pas plus avancé quand nous dirions que chaque ſyſtême de logarithmes à ſon module particulier, & que le nombre 0,868588963 8 eſt le double du module du ſyſtême dans lequel l'unité eſt le logarithme de 10.

Pour donner une idée de l'utilité dont peuvent être les logarithmes, dans la réſolution des problêmes qu'on propoſe aſſez communément aux Arithméticiens, on en va faire uſage dans les queſtions ſuivantes.

QUESTION PREMIERE.

230 *Le premier terme & la raiſon d'une progreſſion géométrique étant donnés, trouver le numéro d'un terme égal à un nombre propoſé.*

Nous avons vû (N°. 188.) que tous les termes d'une progreſſion géométrique, peuvent être repréſentés par le premier terme multiplié ou diviſé continuellement de ſuite par la raiſon de la progreſſion; & (N°. 190.) qu'un terme quelconque eſt par conſéquent compoſé du premier, multiplié ou diviſé autant de fois de ſuite par la raiſon de la progreſſion, qu'il a de termes avant lui. Ainſi puiſque dans la progreſſion géométrique propoſée, le premier terme, la raiſon & le terme dont on demande le numéro, ſont donnés; on pourra trouver le numéro qui précede celui qu'on cherche, en multipliant continuellement de ſuite le premier terme par la raiſon de la progreſſion, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à un terme égal à celui dont on demande le numéro, & en marquant le nombre des multiplications que l'on fait: car ce nombre de multiplications ſera évidemment

égal au nombre des termes qui précédent celui qui eſt donné; & par conſéquent en ajoûtant 1 à ce nombre, on aura le numéro qu'on demande.

Comme cette opération exige ſouvent beaucoup de multiplications qui conduiſent à des fractions embaraſſantes, lorſque la raiſon de la progreſſion n'eſt pas un nombre entier, & que dans le cas où le nombre dont on veut avoir le numéro, n'eſt pas un terme juſte de la progreſſion, elle ne peut faire trouver ce numéro que par des tâtonnemens qu'on n'oſeroit conſeiller; nous allons propoſer une autre méthode dans laquelle nous ferons uſage de la petite Table de logarithmes que nous avons donnée.

Puiſque (N°. 188.) chaque terme de la progreſſion eſt compoſé du premier multiplié ou diviſé continuellement par la raiſon de la progreſſion; il eſt clair (N°. 215 ou 216.) que les logarithmes des termes de cette progreſſion, ſeront compoſés du logarithme du premier, en lui ajoûtant, ou en retranchant continuellement le logarithme de la raiſon. Ainſi les logarithmes des termes de la progreſſion géométrique formeront une progreſſion arithmétique qui aura pour premier terme le logarithme du premier terme de la progreſſion géométrique, pour *différence propre additive* ou *ſouſtractive* le logarithme de la raiſon de la progreſſion géométrique; & pour dernier terme le logarithme du terme ou du nombre donné dont on demande le numéro: & comme le premier terme, la raiſon & le terme ou nombre dont on demande le numéro, ſont connus dans la progreſſion géométrique; il eſt clair que les logarithmes de ces quantités, qui ſont le premier terme, la différence & le dernier terme de la progreſſion arithmétique correſpondante, ſont auſſi connus.

Comme la progreſſion géométrique & la progreſſion

arithmétique correſpondante ont le même nombre de termes, le numéro du nombre que l'on conſidere comme dernier terme dans la progreſſion géométrique, ſera le même que celui de ſon logarithme, conſidéré comme dernier terme dans la progreſſion arithmétique. Ainſi la queſtion dont l'objet eſt de trouver ce numéro, ſe réduira à trouver le nombre des termes d'une progreſſion arithmétique dont les extrêmes & la différence propre ſont donnés.

Quoique le problême auquel la queſtion préſente ſe réduit, ſoit ſemblable à la queſtion III propoſée page 382 ſur les progreſſions arithmétiques; nous ne nous diſpenſerons point d'en continuer la réſolution.

Comme le dernier terme de la progreſſion arithmétique, ou le logarithme du nombre dont on demande le numéro, contient le premier terme de la même progreſſion, (ou le logarithme du 1^r^. terme de la progreſſion géométrique) avec la différence additive ou ſouſtractive priſe autant de fois qu'il y a de termes avant lui; ſi l'on retranche le logarithme du 1^r^. terme de la progreſſion géométrique, du logarithme du terme dont on cherche le numéro, ou que l'on ôte ce dernier logarithme du premier; le reſte ſera égal au produit de la différence propre multipliée par le nombre des termes qui précédent celui dont on veut avoir le numéro. Ainſi en diviſant ce reſte par la différence, c'eſt-à-dire par le logarithme de la raiſon de la progreſſion géométrique, le quotient ſera le nombre des termes qui précédent celui dont on demande le numéro; & par conſéquent en ajoûtant 1 à ce quotient, l'on aura le numéro demandé.

La regle pour réſoudre la queſtion propoſée, conſiſte donc à prendre la différence du logarithme du premier terme, au logarithme du nombre ou terme dont on demande le numéro; ce qu'on fera en re-

tranchant le plus petit de ces deux logarithmes, du plus grand; à diviſer enſuite le reſte, par le logarithme de la raiſon de la progreſſion; & à mettre une unité de plus au quotient, pour le rendre égal au numéro demandé.

EXEMPLE PREMIER.

231 *Le premier terme d'une progreſſion géométrique croiſſante étant* 7, *& la raiſon étant* 2; *on demande le numéro du terme qui eſt égal à* 896.

On prendra le logarithme de 896, ſavoir 2,9523080

Et le logarithme de 7, ſavoir 0,8450980

Puis retranchant le ſecond logarithme du premier, il reſtera 2,1072100

Enſuite on prendra le logarithme de 2, ſavoir 0,3010300, & l'on diviſera par ce logarithme le reſte 2,1072100; & le quotient 7 qu'on trouvera ſera le nombre des termes qui précédent le terme 896: en ſorte que ce terme 896 ſera le huitiéme de la progreſſion.

EXEMPLE II.

232 *Le premier terme d'une progreſſion géométrique étant* 1, *& la raiſon étant* $\frac{20}{21}$; *on demande le numéro du terme égal à* 3.

On prendra le logarithme de 3, ſavoir 0,4771213: & comme le logarithme du premier terme 1, eſt zéro, on n'aura rien à retrancher du logarithme de 3: ainſi ce logarithme reſtera en entier.

On prendra enſuite le logarithme de la raiſon $\frac{21}{20}$, qu'on trouvera (N°. 216.) de 0,0211893; & diviſant par ce logarithme, le logarithme de 3, le quo-

tient 22, 51 qu'on trouvera ſera le nombre des termes qui précédent 3 : en ſorte que 23, 51 ſera le numéro du terme 3 ; c'eſt-à-dire que ce terme ſera entre le vingt-troiſiéme & le vingt-quatriéme, à peu près à égale diſtance des deux.

REMARQUE.

233 On peut remarquer dans ce dernier exemple, que dans le cas où l'unité eſt le premier terme d'une progreſſion géométrique dont on connoit la raiſon ; la regle pour trouver le numéro d'un terme connu de cette progreſſion, ſe réduit à diviſer par le logarithme de la raiſon, le logarithme du terme donné dont on demande le numéro, & à augmenter d'une unité le quotient de cette diviſion.

On peut encore remarquer en général que ſi la progreſſion eſt décroiſſante, c'eſt-à-dire ſi le terme dont on demande le numéro eſt moindre que le premier ; on pourra regarder le terme dont on demande le numéro, comme le premier terme de la progreſſion, & conſidérer le premier comme celui dont on demande le numéro. Par ce moyen les deux exemples que nous avons donnés pour des progreſſions croiſſantes, ſeront applicables à des progreſſions décroiſſantes.

QUESTION II.

234 *Une ſomme d'argent ayant été placée au denier 20, c'eſt-à-dire à condition d'en retirer un intérêt annuel égal au vingtiéme de cette ſomme ; au bout de la premiere année on ajoûte l'intérêt à la ſomme principale, pour retirer du tout un nouvel intérêt au denier vingt, & l'on continue de faire la même choſe tous les ans, juſqu'à ce que le fonds ſoit triplé. On demande au bout de quel temps la ſomme premiérement miſe à intérêt ſera triplée.*

Puiſque le fonds produit un intérêt au denier 20, & qu'on ajoûte toûjours l'intérêt avec le fonds, il eſt clair qu'au bout de la premiere année, ou au commencement de la ſeconde, le fonds ſera augmenté d'un vingtiéme; & que le ſecond fonds qui réſultera de cette augmentation, ſera par conſéquent égal au premier multiplié par 1 & $\frac{1}{20}$, c'eſt-à dire par $\frac{21}{20}$.

Au bout de la ſeconde année, ou au commencement de la troiſiéme, le ſecond fonds ſera pareillement augmenté d'un vingtiéme; ce qui fera un troiſiéme fonds égal au ſecond multiplié par 1 & $\frac{1}{20}$, c'eſt-à-dire par $\frac{21}{20}$.

Enfin, comme à la fin de chaque année l'intérêt ſera toûjours ajoûté au fonds précédent, & ſera par conſéquent compoſé du fonds précédent multiplié par 1 & $\frac{1}{20}$, c'eſt-à-dire par $\frac{21}{20}$; il eſt évident que les différens fonds qui réſulteront de l'addition continuelle de l'intérêt au fonds précédent, feront une progreſſion géométrique croiſſante dont la raiſon ſera $\frac{21}{20}$, & dont le premier & le dernier terme, ſeront la ſomme premiérement placée, & le triple de cette ſomme. Ainſi en ſuppoſant que le premier terme de cette progreſſion eſt 1, & que le dernier terme ou le fonds devenu triple eſt 3; on trouvera comme on a fait (N°. 232.), que le numéro du terme qui précéde le dernier 3 eſt 22,51, & que le numéro du dernier terme 3 eſt par conſéquent 23,51.

Comme le premier terme de la progreſſion géométrique que nous conſidérons, eſt le fonds qui répond au commencement de la premiere année; & que chacun des autres termes répond au commencement d'une année; il eſt évident que le numéro 23,51 du nombre 3 qui repréſente le fonds triplé, répondra à peu de choſe près au milieu de la vingt-troiſiéme année; c'eſt-à-dire que le fonds mis pre-

miérement à intérêt, ſera triplé après vingt-deux ans & demi.

QUESTION III.

235 *D'un baril de* 100 *pintes de vin, on tire tous les jours une pinte que l'on remplace à meſure par une pinte d'eau; & l'on demande combien il faut tirer de pintes pour réduire le vin du baril à la moitié.*

La premiere pinte qu'on tire du baril, en réduit le vin aux 99 centiémes: ainſi repréſentant la totalité du vin du baril par 1, le premier reſte du vin eſt $\frac{99}{100}$.

La premiere pinte de vin tirée du baril, étant remplacée par une pinte d'eau, & le mélange contenant par conſéquent 99 parties de vin & une partie d'eau; la ſeconde pinte qu'on en tire, en réduiſant le mélange aux 99 centiémes, réduit auſſi le vin de ce mélange à ſes 99 centiémes; c'eſt-à-dire qu'après avoir tiré une ſeconde pinte du baril, il n'y reſte en vin que les 99 centiémes de ce qu'il contenoit avant d'avoir tiré la ſeconde pinte.

La ſeconde pinte tirée étant encore remplacée par une pinte d'eau, la troiſiéme pinte que l'on tire, réduit encore ce nouveau mélange à ſes 99 centiémes: ainſi la quantité de vin de ce mélange, eſt auſſi réduite à ſes 99 centiémes; c'eſt-à-dire qu'il ne reſte en vin dans le baril que les 99 centiémes de ce qu'il y avoit avant d'avoir tiré la troiſiéme pinte.

Comme on continue toûjours de remplir le baril avec une pinte d'eau, & qu'à meſure qu'on tire une pinte du mélange, on tire la centiéme partie du vin qu'il contient; il eſt évident que chaque quantité de vin qui reſte dans le baril, après avoir tiré chaque pinte, eſt toûjours les 99 centiémes de la quantité de vin qu'il y avoit auparavant.

Les différentes quantités de vin qui reſtent dans le baril forment donc une progreſſion géométrique décroiſſante, dont la totalité du baril, qu'on repréſente par l'unité, eſt le premier terme, & dont cette fraction $\frac{99}{100}$ eſt la raiſon ; c'eſt-à-dire que chaque terme de cette progreſſion eſt le produit du terme précédent multiplié par $\frac{99}{100}$, ou le quotient de la diviſion du terme précédent par $\frac{100}{99}$: & comme par les conditions du problême, on tire du baril juſqu'à ce que le vin ſoit réduit à la moitié de ce qu'il y en avoit, la queſtion ſe réduira à trouver le nombre des termes d'une progreſſion géométrique, dont le premier terme eſt 1, le dernier $\frac{1}{2}$, & la raiſon $\frac{99}{100}$.

On prendra donc le logarithme de $\frac{1}{2}$, ſavoir $-0,3010300$, & celui de $\frac{99}{100}$, ſavoir $-0,0043648$, qui ſont les mêmes que ceux de 2 & de $\frac{100}{99}$, avec cette différence qu'ils ſont négatifs : & diviſant le premier logarithme $-0,3010300$ par le ſecond $-0,0043648$, le quotient ſera le nombre des termes qui précédent le dernier de la progreſſion, ou le nombre de pintes qu'on a tirées du baril ; parce que le ſecond terme $\frac{99}{100}$ venant après avoir tiré la premiere pinte, la progreſſion doit avoir un terme de plus qu'on n'a tiré de pintes.

Les deux termes $-0,3010300$ & $-0,0043648$ de la diviſion qu'on doit faire, étant des nombres faux, on ne peut pas ſe diſpenſer de faire remarquer, que deux nombres faux diviſés l'un par l'autre, ne donnent pas un quotient différent de celui qu'on auroit ſi le dividende & le diviſeur étoient des nombres vrais ; parce qu'un nombre faux eſt contenu dans un autre nombre faux, de la même maniere qu'un nombre vrai eſt contenu dans un nombre vrai. Par exemple, une dette de 100^{fl}, qu'on peut regarder comme un nombre faux -100^{fl}, eſt contenue 10 fois dans une dette de 1000^{fl} qui peut être auſſi conſidérée comme un nom-

bre faux —1000#, de même qu'un bien de 100# eſt contenu 10 fois dans un bien de 1000#.

Il eſt donc évident que pour diviſer —0,3010300 par —0,0043648, afin de trouver le nombre des pintes qu'on tire du baril pour réduire le vin à la moitié avec les conditions propoſées, on peut regarder le dividende & le diviſeur comme des nombres vrais (0,3010300 & 1,0043648), & diviſer enſuite le premier par le ſecond; ce qui donnera pour quotient le nombre vrai $68\frac{42:36}{43648}$, lequel marquera qu'il faut tirer près de 69 pintes, & remplir à meſure qu'on tire une pinte, pour réduire à la moitié les 100 pintes de vin du baril.

ELEMENS

ELÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

LIVRE IX.

Des Changemens d'Ordre & des Combinaiſons.

236 ON entend par *Changement d'Ordre* ou *Permutation* la maniere d'arranger pluſieurs choſes de toutes les façons poſſibles, en ſorte que les réſultats de tous les arrangemens contiennent préciſément les mêmes choſes différemment arrangées.

Quoique le mot de *combinaiſon* ne paroiſſe convenir qu'à une méthode pour trouver toutes les façons dont on peut prendre pluſieurs choſes deux à deux, on entend cependant par ce terme la maniere de trouver les réſultats de pluſieurs choſes priſes une à une, trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq, ou en auſſi grand nombre qu'on peut les prendre, avec toutes les conditions dont une queſtion eſt ſuſceptible.

CHAPITRE PREMIER.

Des Changemens d'Ordre.

237 POUR découvrir toutes les façons poſſibles de changer l'ordre de pluſieurs choſes, par exemple en combien de manieres on peut varier l'ordre de ſix perſonnes aſſiſes à une même table ; il faut commencer par trouver tous les arrangemens d'un petit nombre de choſes ; & paſſant aux arrangemens différens que peuvent recevoir un plus grand nombre de choſes, on parviendra à trouver la loi que ſuivent les dénombremens de tous les arrangemens poſſibles, que peuvent recevoir différentes choſes quel qu'en ſoit le nombre.

Pour déſigner les choſes dont on voudra trouver tous les arrangemens poſſibles, rien ne paroît plus convenable que les lettres de l'alphabet. Nous repréſenterons donc une ſeule choſe par A ; deux choſes différentes par A, B ; trois choſes par A, B, C ; &c ; & nous chercherons tous les arrangemens que peuvent recevoir les lettres que nous prendrons, comme ſi nous voulions trouver tous les mots poſſibles qu'on peut faire avec elles en les employant toutes.

1°. Une ſeule lettre A n'eſt pas ſuſceptible de pluſieurs arrangemens, tant qu'on ne prend point d'autres lettres, à l'égard deſquelles elle puiſſe être différemment placée. Ainſi une ſeule lettre A ne peut faire qu'un ſeul mot, & par conſéquent ne peut avoir qu'un arrangement.

2°. Si avec la lettre A l'on prend une ſeconde lettre B ; on voit clairement que cette nouvelle lettre pourra être placée, d'abord à la droite, & enſuite à

la gauche de *A*; & que deux lettres *A*, *B* peuvent par conſéquent avoir ces deux arrangemens *AB*, *BA*.

3°. Lorſqu'on a les deux arrangemens *AB*, *BA*, de deux lettres; ſi l'on prend une troiſiéme lettre *C*, il eſt évident qu'elle pourra occuper ſucceſſivement trois places différentes, dans chacun des deux mots *AB*, *BA*; ſavoir une place au commencement, une place au milieu, & une place à la fin de chaque mot; en ſorte que les trois lettres *A*, *B*, *C* ſeront ſuſceptibles de trois fois autant d'arrangemens que deux lettres *A*, *B*, & pourront par conſéquent avoir 3 fois 2 ou 6 arrangemens différens *CAB*, *ACB*, *ABC*, *CBA*, *BCA*, *BAC*.

4°. Connoiſſant que trois lettres *A*, *B*, *C* peuvent être écrites dans ſix ordres différens; ſi l'on prend une quatriéme lettre *D*, on verra ſans peine qu'on peut lui donner 4 places différentes dans chacun des 6 mots qu'on peut compoſer avec les 3 lettres *A*, *B*, *C*; ſavoir une place au commencement, une place à la droite de la premiere lettre, une place à la droite de la ſeconde, & une place à la droite de la troiſiéme & derniere lettre; & que les 4 lettres *A*, *B*, *C*, *D* pourront par conſéquent être arrangées en quatre fois autant de manieres que les trois lettres *A*, *B*, *C*, ou changer d'ordre en 4 fois 6, ou 24 manieres différentes.

Enfin, ſi l'on continue de prendre de nouvelles lettres avec celles dont on connoît le nombre des arrangemens poſſibles; on reconnoîtra aiſément que 5 lettres pourront recevoir 5 fois 24 ou 120 arrangemens différens; que 6 lettres pourront avoir 6 fois 120 ou 720 arrangemens différens; que 7 lettres en peuvent avoir 7 fois 720 ou 5040; 8 lettres, 8 fois 5040 ou 40320; 9 lettres, 362880; 10 lettres, 3628800: & ainſi des autres nombres de lettres.

On aura donc tous les arrangemens que pourront recevoir tant de lettres qu'on voudra, en écrivant tous les nombres de ſuite 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, &c; & en multipliant enſemble autant de ces nombres de ſuite, qu'on voudra avoir de lettres à changer d'ordre. Par exemple pour 3 lettres, on prendra le produit $1\times2\times3$; pour 4 lettres, le produit $1\times2\times3\times4$; pour 8 lettres, le produit $1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8$: & ainſi des autres.

Les différens arrangemens poſſibles que peuvent recevoir pluſieurs choſes, ne ſont pas toûjours utiles; & les conditions d'une queſtion peuvent en faire rejetter un grand nombre. Par exemple ſi l'on propoſoit de trouver en combien de manieres on peut varier l'ordre des mots de ce Vers latin compoſé à la louange de la Vierge par le R. P. Bernard Bauhuſe Jéſuite de Louvain,

Tot tibi ſunt dotes, Virgo, quot ſidera cœlo.

de ſorte que de tous les changemens, il réſulte toûjours un vers hexamétre, dont le cinquiéme pied doit être un dactyle & le ſixiéme un ſpondée; on ne pourroit pas faire uſage de la dixiéme partie des 40320 changemens d'ordre que les huit mots de ce vers peuvent recevoir.

Henri Dupuy ou Erycius Puteanus, en faiſant l'énumération des changemens d'ordre de ce vers, compte autant de variations, que d'étoiles au ciel, dont il fixe le nombre à 1022 ſeulement.

Le P. Preſtet dans la premiere édition de ſes élémens de mathématiques, compte 2196 variations du même vers; & dans la ſeconde édition, il en compte 3276. Wallis en compte 3096; & M. Jacques Bernoulli en compte 3312 dans leſquelles la meſure du vers eſt obſervée.

CHAPITRE II.

Des Combinaiſons.

NOus avons déjà dit que les combinaiſons conſiſtent à prendre une à une, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre &c, toutes les grandeurs qui ſont données à combiner, avec toutes les conditions dont un problême eſt ſuſceptible.

1°. On peut propoſer, par exemple, de combiner les cinq voyelles *a*, *e*, *i*, *o*, *u*, & de trouver combien de mots d'une lettre, de deux lettres &c, on peut faire avec elles, ſans impoſer d'autre condition que celle de ne point faire des mots de plus de cinq lettres. On peut propoſer de même de trouver tous les mots poſſibles qu'on peut faire avec toutes les lettres de l'alphabet, à condition de ne point faire de mots qui ayent un plus grand nombre de lettres qu'il n'y en a dans l'alphabet : en ſorte qu'on pourra faire des mots qui contiendront la même lettre une fois, deux fois, trois fois, & en général autant de fois qu'on aura de lettres à combiner ; & des mots qui ſeront compoſés des mêmes lettres différemment arrangées.

2°. On pourroit propoſer de faire des combinaiſons d'un certain nombre de lettres, en défendant ſeulement d'employer pluſieurs fois la même lettre dans le même mot.

3°. On peut propoſer de combiner différentes choſes, ſans pouvoir prendre la même choſe pluſieurs fois en même temps, & ſans avoir égard aux

changemens d'ordre que ces choſes priſes deux à deux, ou trois à trois &c, peuvent recevoir. Par exemple on peut propoſer de combiner de toutes les façons poſſibles dix ouvriers, pour les faire travailler un à un, deux à deux, trois à trois &c. Dans ce cas, le nombre des combinaiſons ſeroit très-différent de celui des mots qu'on pourroit faire avec dix lettres, parce que le même ouvrier ne peut pas être combiné avec lui-même comme la même lettre, & que deux ou trois &c ouvriers différemment arrangés ne paſſeront pas dans le cas préſent pour différentes combinaiſons.

On pourroit ajoûter d'autres conditions, qui, au lieu de diminuer le nombre des combinaiſons, l'augmenteroient; par exemple on pourroit permettre de faire des mots de 6 lettres, de 7 lettres &c, en employant les cinq voyelles ſeulement. Mais nous ne parlerons point de ces dernieres combinaiſons, où l'on peut employer plus de lettres qu'il n'y a d'eſpéces de caractéres à combiner.

I.

238 Si l'on propoſoit de faire tous les mots poſſibles qui peuvent réſulter des 25 lettres de l'alphabet *a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, ſ, t, u, v, x, y, z*, priſes une à une, deux à deux, trois à trois &c, en exigeant ſeulement qu'il n'y ait point de mot de plus de 25 lettres; on trouveroit un ſi grand nombre de combinaiſons à faire, que perſonne ne pourroit ſe flatter de les écrire toutes. Mais ſans exécuter ces combinaiſons, on peut aiſément en trouver le nombre, en examinant la loi ſuivant laquelle le nombre des combinaiſons augmente, à

meſure qu'on emploie un plus grand nombre de lettres.

1°. En ne prenant qu'une lettre pour chaque mot, on compoſera 25 mots, c'eſt-à-dire autant de mots qu'on aura de lettres. Le nombre de ces premieres combinaiſons ſe réduira donc à 25.

2°. Pour compoſer tous les mots de deux lettres, on remarquera qu'on peut mettre chaque lettre avec chacune de celles qui compoſent les 25 premieres combinaiſons.

Premierement on peut mettre la lettre *a* à la gauche de chacune des 25 lettres; ce qui donnera ces 25 combinaiſons de deux lettres *aa, ab, ac, ad, ae, af, ag, ah, ai, aj, ak, al, am, an, ao, ap, aq, ar, as, at, au, av, ax, ay, az*, dont la premiere lettre ſera *a*.

Secondement on peut mettre la lettre *b* à la gauche de chacune des 25 lettres; ce qui donnera encore ces 25 combinaiſons de deux lettres *ba, bb, bc, bd, be, bf, bg, bh, bi, bj, bk, bl, bm, bn, bo, bp, bq, br, bs, bt, bu, bv, bx, by, bz*, dont la premiere lettre ſera *b*.

Enfin les 25 lettres pouvant être miſes ſucceſſivement à la gauche de chacune des 25 lettres de l'alphabet; il eſt évident qu'on aura 25 fois 25 ou 625 mots de deux lettres ſeulement.

3°. En combinant de la même maniere chacune des 25 lettres, avec les 625 combinaiſons de deux lettres; c'eſt-à-dire en mettant d'abord *a*, puis *b*, enſuite *c* &c à la gauche de ces 625 combinaiſons; chaque troiſiéme lettre donnera 625 mots différens; & les 25 lettres miſes ſucceſſivement à la gauche des 625 mots de deux lettres, donneront en tout 25 fois 625 mots de trois lettres, ou 15625 combinaiſons des 25 lettres priſes trois à trois.

Pour peu que l'on faſſe attention à la méthode

qu'on a ſuivie pour trouver les combinaiſons des 25 lettres priſes d'abord une à une, puis deux à deux, enſuite trois à trois; l'on reconnoîtra aiſément que tous les différens nombres de combinaiſons des 25 lettres, priſes une à une, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre &c, ſont les termes de cette progreſſion géométrique croiſſante dont le premier terme eſt 25 & dont la raiſon eſt auſſi 25.

$\therefore$ 25 : 25×25 : 25×25×25 : 25×25×25×25 : &c.

Il ſuit évidemment de ce qu'on vient de dire, que ſi l'on combinoit ſeulement les cinq voyelles *a, e, i, o, u*, une à une, puis deux à deux, enſuite trois à trois &c; les différens nombres de combinaiſons ſeroient exprimés par les termes de la progreſſion géométrique croiſſante $\therefore$ 5 : 5×5 : 5×5×5 : 5×5×5×5 : 5×5×5×5×5 qui a 5 pour premier terme & pour raiſon.

En un mot, il eſt aiſé de voir que les différens nombres de combinaiſons d'un nombre quelconque de lettres, priſes d'abord une à une, puis deux à deux, enſuite trois à trois &c, ſont repréſentés par les termes correſpondans d'une progreſſion géométrique, dont le premier terme eſt égal au nombre des lettres propoſées, & dont la raiſon eſt égale au même nombre.

II.

239 Dans les combinaiſons dont on vient de parler, ſont compris tous les mots qu'on peut faire en répétant pluſieurs fois la même lettre, & tous les mots qui contiennent préciſément les mêmes lettres différemment arrangées.

Si l'on vouloit exclurre du nombre des combinaiſons des 25 lettres, tous les mots où la même lettre

eſt répétée, comme il faudroit faire ſi les 25 lettres *a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, ſ, t, u, v, x, y, z*, repréſentoient 25 perſonnes qui duſſent être à une même table dans tous les ordres poſſibles; premierement une à une, puis deux à deux, enſuite trois à trois &c; les différens nombres de combinaiſons des 25 lettres, priſes une à une, deux à deux, trois à trois &c, ſe réduiroient aux termes correſpondans de cette ſuite 25; 25×24; 25×24×23; 25×24×23×22; 25×24×23×22×21 &c, dont le premier terme 25 eſt égal au nombre total des lettres qu'il faut combiner, & dont chaque terme eſt compoſé du précédent multiplié par un nouveau facteur décroiſſant continuellement d'une unité.

Car 1° puiſqu'on n'a que 25 lettres pour compoſer des mots; il eſt évident qu'on n'aura que 25 mots d'une ſeule lettre.

2°. Pour compoſer tous les mots de deux lettres ſans en répéter aucune deux fois dans le même mot; on remarquera que chacune des 25 lettres ne peut être combinée qu'avec les 24 autres, & que chaque lettre qu'on voudra écrire la premiere ne donnera par conſéquent que 24 mots. La lettre *a*, par exemple écrite la premiere & combinée ſucceſſivement avec les 24 autres, ne donnera que ces 24 mots *ab, ac, ad, ae, af, ag, ah, ai, aj, ak, al, am, an, ao, ap, aq, ar, aſ, at, au, av, ax, ay, az*. La lettre *b*, écrite la premiere & combinée ſucceſſivement avec les 24 autres lettres, ne donnera que ces 24 mots *ba, bc, bd, be, bf &c*: & ainſi des autres; en ſorte que les 25 lettres donneront en tout 25 fois 24 mots de deux lettres, c'eſt-à-dire un nombre de mots exprimé par 25×24 qui eſt le ſecond terme de la ſuite propoſée.

3°. En compoſant les mots de trois lettres, ſans

en répéter aucune deux fois dans le même mot ; on observera que tous les mots de deux lettres, ne pourront pas être combinés avec les deux lettres qu'ils contiennent déjà, mais seulement avec les 23 autres. Par exemple les mots *ab*, *ba*, composés des deux lettres *a* & *b*, ne pourront plus être combinés avec ces deux lettres, mais seulement avec les 23 autres *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *j*, *k*, *l*, *m*, *n*, *o*, *p*, *q*, *r*, *ſ*, *t*, *u*, *v*, *x*, *y*, *z*. Les deux mots *bc*, *cb*, composés des deux lettres *b* & *c*, ne pourront plus être combinés avec ces deux lettres, mais seulement avec les 23 autres *a*, *d*, *e*, *f*, *g*, *&c* : & ainsi des autres ; en sorte que chaque mot de deux lettres ne pourra plus être combiné qu'avec un nombre de lettres de deux unités moindre que le nombre total 25 des lettres données. Or chaque mot de deux lettres écrit le premier, & combiné successivement avec les 23 autres lettres donnant vingt-trois mots de trois lettres ; il est clair que le nombre 25×24 des mots de deux lettres combinés successivement avec les 23 autres lettres, donnera un nombre de mots de trois letres exprimé par 25×24×23 qui est le troisiéme terme de la suite proposée.

4°. Chacun des mots de trois lettres qu'on vient de trouver ne pouvant plus être combiné avec aucune des trois lettres qu'il contient, mais seulement avec les 22 autres ; on aura 22 fois autant de mots de quatre lettres, qu'il y a de mots de trois lettres. Ainsi le nombre des mots de quatre lettres sera représenté par 25×24×23×22 qui est le quatriéme terme de la suite.

Les mots déjà composés de plusieurs lettres ne peuvent plus être combinés qu'avec les lettres qu'ils ne contiennent point, c'est-à-dire avec un nombre de lettres égal à la différence qu'il y a entre le nom-

bre total des lettres données, & le nombre des lettres des mots déjà compoſés. Or le nombre des lettres avec leſquelles les mots faits peuvent être combinés, diminuant continuellement d'une unité, à meſure que le nombre des lettres des mots précédemment faits, augmente d'une unité; il eſt évident que la ſuite des nombres de mots qu'on peut faire avec un nombre de lettres données, priſes d'abord une à une, puis deux à deux, enſuite trois à trois &c, ſans répéter la même lettre deux fois dans le même mot, doit commencer par un terme égal au nombre total des lettres données; & que chacun des autres termes doit être compoſé de celui qui le précéde, multiplié par un nouveau facteur continuellement décroiſſant d'une unité.

Les nombres de mots qu'on peut faire avec 25 lettres priſes d'abord une à une, puis deux à deux, enſuite trois à trois &c, ſans qu'aucune ſoit répétée deux fois dans le même mot, ſont donc repréſentés par les termes correſpondans de cette ſuite 25; 25×24; 25×24×23; 25×24×23×22; 25×24×23×22×21; .... 25×24×23×.....×1.

Les différens nombres de mots qu'on peut faire avec les cinq voyelles *a*, *e*, *i*, *o*, *u*, en les prenant une à une, puis deux à deux, enſuite trois à trois, ſans répéter deux fois la même voyelle dans le même mot, ſont donc exprimés par les termes correſpondans de cette ſuite 5; 5×4; 5×4×3; 5×4×3×2; 5×4×3×2×1.

On voit bien que la ſuite dont les termes expriment les différens nombres de mots d'une lettre, de deux lettres, de trois lettres &c, qu'on peut faire avec 25 lettres, ſe termine néceſſairement au vingt-cinquiéme terme; que celle dont les termes repréſentent les différens nombres de mots d'une lettre, de deux lettres,

de trois lettres &c, qu'on peut faire avec les cinq voyelles, ſe termine au cinquiéme terme ; & que chaque ſuite dont les termes donneront les nombres de mots d'une lettre, de deux lettres, de trois lettres &c, aura toûjours autant de termes qu'il y aura de lettres à combiner ; parce que dans toutes ces ſuites, le terme qui exprimera le nombre des mots compoſés de toutes les lettres données, aura l'unité pour dernier facteur, & que chacun des autres termes qu'on voudroit ajoûter à ces ſuites, contiendroit un facteur plus petit d'une unité que le dernier facteur. Or ce nouveau facteur étant plus petit d'une unité que l'unité, ſeroit zéro ; & il eſt évident que tous les termes qui contiendroient zéro multiplié par tout ce qu'on voudra, ſeroient nuls.

III.

240 Les combinaiſons que nous avons trouvées dans l'article précédent, contiennent tous les mots compoſés de lettres données, priſes d'abord une à une, enſuite deux à deux, puis trois à trois &c, ſans qu'aucune lettre ſoit répétée dans le même mot ; mais ces combinaiſons renferment encore tous les mots que l'on peut faire avec les mêmes lettres différemment arrangées.

Si dans ces combinaiſons, l'on ne vouloit conſerver qu'un ſeul mot de tous ceux qui contiennent préciſément les mêmes lettres ; il eſt clair qu'il faudroit diviſer le nombre des mots de deux lettres, par le nombre des arrangemens que peuvent recevoir deux lettres. Il faudroit auſſi diviſer le nombre des mots de trois lettres par le nombre des arrangemens que peuvent recevoir trois lettres : & ainſi des autres.

Or nous avons vû (N°. 237.) que deux lettres s'arrangent de 2 maniéres ; trois lettres, de 3 fois 2 maniéres ; quatre lettres, de 4 fois 3 fois 2 maniéres ; &c.

On diviſera donc le nombre des combinaiſons de deux lettres par 2, le nombre des combinaiſons de trois lettres par 2×3, le nombres des combinaiſons de quatre lettres par 2×3×4, le nombre des combinaiſons de cinq lettres par 2×3×4×5 : & ainſi des autres.

Il ſuit de là que ſi l'on veut avoir le nombre de tous les mots qu'on peut compoſer avec les 25 lettres *a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, ſ, t, u, v, x, y, z*, non ſeulement ſans répéter aucune lettre dans le même mot, mais encore ſans faire pluſieurs mots qui contiennent préciſément les mêmes lettres quoique différemment arrangées ; il faudra prendre la ſuite qu'on a trouvée dans l'article précédent pour la combinaiſon des 25 lettres ; & diviſer le ſecond terme de cette ſuite par 2, le troiſiéme terme par 2×3, le quatriéme par 2×3×4 : & ainſi des autres ; ce qui donnera pour les nombres des différentes combinaiſons qu'on demande, les termes de cette ſuite $25 ; \frac{25\times24}{2} ; \frac{25\times24\times23}{2\times3} ; \frac{25\times24\times23\times22}{2\times3\times4} ; \ldots\ldots\ldots\ldots ; \frac{25\times24\times23\times22\times\ldots\ldots\times1}{2\times3\times4\times\ldots\ldots\times25}$.

Si l'on vouloit avoir les nombres des mots qu'on peut compoſer avec les cinq voyelles, non ſeulement ſans répéter deux fois la même voyelle dans le même mot, mais encore ſans faire aucun mot qui contienne les mêmes voyelles quoique différemment arrangées, on les trouveroit dans les termes de cette ſuite $5 ; \frac{5\times4}{2} ; \frac{5\times4\times3}{2\times3} ; \frac{5\times4\times3\times2}{2\times3\times4} ; \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times3\times4\times5}$.

Enfin l'on aura tous les différens mots, ou tous les différens nombres de combinaiſons d'un nombre

quelconque de lettres, priſes une à une, deux à deux, trois à trois, &c, ſans répéter aucune lettre dans le même mot, & ſans faire de mots qui contiennent préciſément les mêmes lettres, en prenant les termes correſpondans d'une ſuite, dont le premier terme ſera égal au nombre total des lettres données; dont chacun des autres termes ſera compoſé du précédent multiplié par un nouveau facteur décroiſſant continuellement d'une unité; & dont le ſecond terme ſera diviſé par 2, le troiſiéme par 2×3, le quatriéme par $2 \times 3 \times 4$, &c.

FIN.

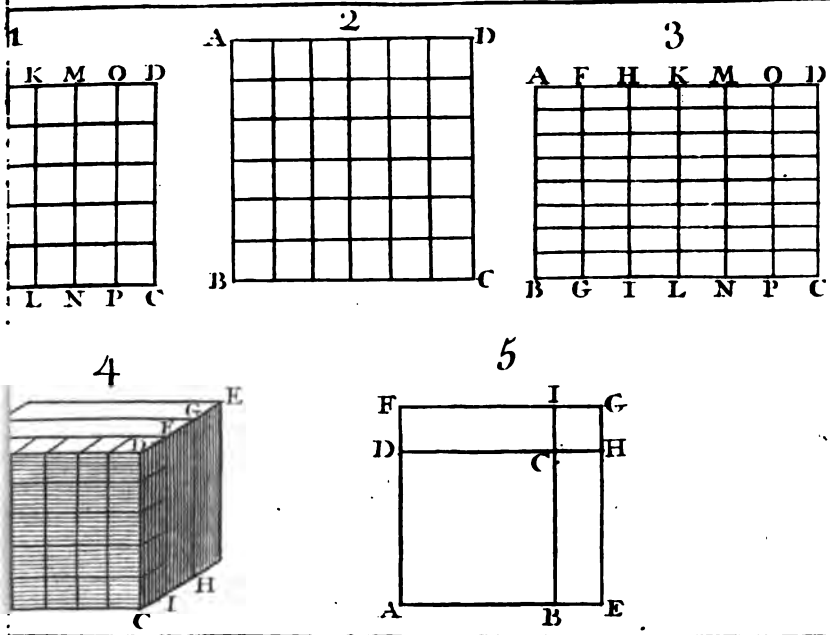

1
K M O D
L N P C
2
A D
B C
3
A F H K M O D
B G I L N P C
4
E
G
F
D
H
I
C
5
F I G
D C H
A B E
6
N O
L
M D R
B
V G
H
T S
C P
Q
F
Y
A
G
O
F Z R
A E
A E
G
X
C P
S

TABLE.

LIVRE PREMIER.

Des Nombres & des Principes généraux de l'Arithmétique.

CHAPITRE I. Des Nombres en général & de l'Unité. Page 1
CHAPITRE II. Des Nombres & de la Numération. 3
CHAPITRE III. Des Parties décimales. 18

LIVRE II.

Des Opérations de l'Arithmétique ſur les Nombres incomplexes.

CHAPITRE I. De l'Addition des Nombres incomplexes. 28

Les nombres qu'on veut ajoûter enſemble, doivent avoir des unités de la même eſpéce ou réductibles à la même eſpéce. *ibid*
Problême. Ajoûter enſemble pluſieurs nombres repréſentés par tant de chiffres qu'on voudra. 29
Exemples. 30 & 31
Exemple pour les nombres qui ont des chiffres décimaux. 33
Remarque ſur cet Exemple. 34
Démonſtration des opérations qu'on a faites pour l'Addition. 35

CHAPITRE II. De la Souſtraction des Nombres incomplexes. 35

La quantité qu'on veut retrancher doit être contenue dans celle dont on veut la retrancher, & elles doivent être toutes deux de la même eſpéce ou réductibles à la même eſpéce. *ibid*

Problême. Souſtraire un nombre d'un autre nombre. 35
Exemples. *de 37 à* 40
Réflexion ſur la Souſtraction des nombres qui ont des chiffres décimaux. 40
Exemple. 41
Démonſtration de l'opération de la ſouſtraction. 42
Remarque. Différentes méthodes pour faire la ſouſtraction. *ibid*
Exemple. 43
Preuve de l'Addition. 44
Preuve de la Souſtraction. 46

CHAPITRE III. De la Multiplication des Nombres incomplexes. 47

Corollaire I. Le produit d'une multiplication aura des unités de même eſpéce que celles du multiplicande, & aura à ſa droite autant de places qu'il y en aura à la droite du multiplicande & du multiplicateur. 48
Corollaire II. Le multiplicande peut être un nombre concret ou abſtrait ; mais le multiplicateur ne peut jamais être conſidéré que comme un nombre abſtrait. 50
Corollaire III. 1°. On multipliera le produit de deux facteurs en multipliant un ſeul de ces facteurs. 2°. Dans quelqu'ordre qu'on prenne les deux facteurs d'une multiplication ; l'on aura toûjours le méme produit. 3°. Il en ſera de même de trois ou d'un plus grand nombre de facteurs, &c. 51
Problême. Multiplier l'un par l'autre deux nombres repréſentés chacun par un ſeul chiffre. 53
Table de Pythagore pour la multiplication de ces nombres. 54
Maniére de multiplier par les doigts. 55
Problême. Multiplier un nombre quelconque qui n'a point de décimales, par un autre qui n'en a point non plus & qui eſt repréſenté par un ſeul chiffre. 56
Exemples. *de 56 à* 59
Problême. Multiplier un nombre quelconque qui n'a point de décimales, par un autre qui n'en a point non plus & qui eſt repréſenté par pluſieurs chiffres. 59
Exemple I. 60
Remarque ſur la maniére de placer les chiffres de chaque produit. 61
Exemples II. & III. 62 & 63
Problême. Multiplier un nombre qui contient des parties décimales, par un autre nombre qui en contient auſſi ou qui n'en contient point. 64
Exemples. *de 64 à* 67.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE IV. *De la Diviſion des Nombres incomplexes.* 68

Corollaire I. Le diviſeur ou le quotient doit être un nombre abſtrait ; & l'un des deux doit avoir des unités de même eſpéce que le dividende. *ibid*

1°. Si le diviſeur a des unités de même eſpéce que le dividende, le quotient ſera un nombre abſtrait qui marquera combien de fois le diviſeur doit être répété pour produire le dividende. 2°. Si le diviſeur eſt compoſé d'unités abſtraites, il marquera combien de fois le quotient doit être répété pour produire le dividende. 69

Corollaire II. Le nombre des unités du quotient ſera le même, ſoit que le dividende & le diviſeur ayent des unités de même eſpéce, ou que le diviſeur ſoit un nombre abſtrait. 71

Corollaire III. { 1°. Si l'on multiplie / 2°. Si l'on diviſe } le dividende d'une diviſion par un nombre quelconque, ſans toucher au diviſeur, le quotient de la nouvelle diviſion ſera égal à celui de la premiere { multiplié / diviſé } par le même nombre. 72

Corollaire IV. { 1°. Si l'on multiplie / 2°. Si l'on diviſe } le diviſeur d'une diviſion par un nombre quelconque, ſans toucher au dividende, le quotient de la nouvelle diviſion ſera égal à celui de la premiere { diviſé / multiplié } par le même nombre. 73

Corollaire V. Si l'on multiplie ou ſi l'on diviſe le dividende & le diviſeur d'une diviſion par une même quantité, le quotient de la nouvelle diviſion ſera le même que celui de la premiere. 74

Corollaire VI. Lorſque le diviſeur eſt compoſé de pluſieurs facteurs multipliés enſemble, on peut diviſer le dividende par l'un des facteurs, puis le quotient de cette diviſion par un autre facteur, & continuer ainſi de diviſer par un nouveau facteur le quotient de la diviſion qu'on vient de faire, juſqu'à ce qu'on ait diviſé par tous les facteurs du diviſeur. *ibid*

Avertiſſement ſur l'uſage de la Table de Pythagore pour la diviſion. 76

Problême. Diviſer un nombre par un autre repréſenté par un ſeul chiffre. 77

Exemples. *de 77 à* 81

Problême. Diviſer un nombre par un autre compoſé de pluſieurs chiffres. 81

Exemples. *de 82 à* 88

Problême. Diviſer un nombre quelconque par un autre, lorſque

le dividende ou le diviſeur contient des parties décimales, ou qu'ils en contiennent tous les deux. 88
Remarque ſur le problême précédent. 90
Problême. Diviſer un nombre qui a des parties décimales, par un diviſeur qui n'en a point. *ibid*
Exemple. 91
Problême. Diviſer un nombre quelconque par un diviſeur qui n'a poin de décimales, & pouſſer la diviſion juſqu'à ce que le quotient ne différe pas du vrai quotient qu'on doit trouver, d'une unité décimale de tel ordre qu'on voudra. 92
Exemple où la diviſion eſt pouſſée juſqu'aux milliémes. *ibid*
Problême. Diviſer un nombre quelconque par un diviſeur plus grand que le dividende, & pouſſer la diviſion juſqu'à ce que le quotient ne différe pas du quotient exact, d'une unité décimale de tel ordre qu'on voudra. 94
Exemple I. où la diviſion eſt pouſſée juſqu'aux cent-milliémes. *ibid*
Exemple II. où la diviſion eſt pouſſée juſqu'aux millioniémes. 96
Avertiſſement. Différentes méthodes de faire la diviſion. 97
De la méthode Italienne abrégée. 98
De la méthode Eſpagnole. 100
De la méthode Françoiſe. 103
Des ſuites décimales compoſées de périodes égales qui ſe ſuccédent à l'infini. 106
Théorême. Tout dividende moindre que 9, qui ſera diviſé par 9, donnera pour le quotient une ſuite infinie de chiffres décimaux égaux à celui du dividende. Tout dividende moindre que 99 ou 999 ou 9999 &c, qui ſera diviſé par 99 ou 999 ou 9999 &c, donnera pour quotient une ſuite infinie de périodes décimales de deux ou de trois ou de quatre &c figures égales à celles du dividende. 107
Corollaire I. La ſomme d'une ſuite infinie de périodes décimales compoſées des mêmes chiffres, ſera égale au quotient d'une période diviſé par un nombre compoſé d'autant de 9 qu'il y aura de figures dans la période. 110
Corollaire II. Une ſuite de périodes décimales qui ne commence pas après la virgule, repréſente le quotient d'une diviſion dont le dividende eſt égal à une période, & dont le diviſeur eſt compoſé non ſeulement d'autant de 9 que la période a de chiffres, mais encore d'autant de zéros qu'il y a de places entre la virgule & le premier chiffre de la premiere période. *ibid*
Preuve de la multiplication. 112
Preuve de la diviſion. 115
Remarque ſur le nombre des chiffres que doit avoir le quotient par rapport au dividende & au diviſeur. 118
Preuve de la multiplication & de la diviſion appelée Preuve par 9. 119

LIVRE III.

Des Fractions.

CHAPITRE I. Des Fractions en général & de leur réduction. 121

Définitions des fractions & des termes qui les compoſent 122
Corollaire I. Une fraction eſt le quotient d'une diviſion qui a pour dividende le numérateur de cette fraction, & pour diviſeur le numérateur de la même fraction. 124
Corollaire II. On peut toujours convertir un nombre entier en une fraction, en le multipliant par un nombre quelconque pour en faire un numérateur, & en lui donnant ce même nombre pour dénominateur. *ibid*
Corollaire III. Une fraction eſt égale à l'unité entière lorſque ſes deux termes ſont égaux. *ibid*
Corollaire IV. Si l'on multiplie ou ſi l'on diviſe par une même quantité les deux termes d'une fraction, ſa valeur ne changera point. 125
Ce que c'eſt que réduire une fraction à ſes moindre termes. *ibid*
Problême. Réduire une fraction à ſes moindres termes ſans en changer la valeur *ibid*
Remarque. Autre maniere de réduire une fraction à ſes moindres termes. 127
Problême. Réduire deux fractions au même dénominateur, ſans changer leur valeur. 129
Problême. Réduire à un même dénominateur tant de fractions qu'on voudra. 130
Remarque. Des fractions réduites à la même dénomination peuvent ſouvent être réduites à de moindres termes ſans ceſſer d'avoir un commun dénominateur. 131
Problême. Trouver les entiers qui ſont dans des fractions. 133

CHAPITRE II. De l'Addition & de la Souſtraction des Fractions. 134

Problême. Ajoûter enſemble pluſieurs fractions. *ibid*
Problême. Souſtraire une fraction d'une autre fraction. 135

CHAPITRE III. De la Multiplication & de la Diviſion des Fractions. 136

Problême. Multiplier une fraction par un nombre entier. 137
Problême. Diviſer une fraction par un nombre entier. 138

Problême. Multiplier une fraction par une fraction. 140
On peut choisir celle des deux fractions qu'on veut, pour multiplicande ou pour multiplicateur. 143
Corollaire I. Un nombre entier peut être regardé comme une fraction dont il est le numérateur, & dont le dénominateur est l'unité. On pourra donc rapporter la multiplication d'un entier par une fraction à celle d'une fraction par une fraction. *ibid.*
Corollaire II. La multiplication par une fraction qui a l'unité pour numérateur est une véritable division par le dénominateur de cette fraction. 144
Problême. Diviser une fraction par une autre fraction. *ibid.*
Corollaire I. La division par une fraction se réduit à une multiplication par la fraction inverse. 145
Corollaire II. La division par une fraction dont le numérateur est l'unité, est une véritable multiplication par le dénominateur de cette fraction. 146

CHAPITRE IV. Des Fractions de Fractions. *ibid.*

Théorême. Une fraction de fraction est égale au produit de la multiplication des deux fractions par lesquelles elle est exprimée. 148
Corollaire I. Une fraction de fraction est toûjours la même, quel que soit l'arrangement des fractions par lesquelles elle est exprimée. *ibid.*
Corollaire II. Une fraction de fraction de fraction &c, quel que soit le nombre des fractions qui la composent, est égale à une fraction qui a pour numérateur le produit des numérateurs de toutes les fractions par lesquelles elle est exprimée, & pour dénominateur le produit des dénominateurs des mêmes fractions. *ibid.*

CHAPITRE V. De la Réduction des Fractions décimales composées d'une suite infinie de périodes égales. 150

Problême. Trouver une fraction simple égale à un nombre décimal composé de quelques chiffres décimaux qui précédent une suite infinie de périodes égales. 151

LIVRE IV.

Des Opérations de l'Arithmétique ſur les Nombres complexes. 153

Valeur de différentes unités de quelques eſpéces & caractéres diſtinctifs de ces unités. 155

CHAPITRE I. De l'Addition des nombres complexes. 156

Problême. Ajoûter enſemble pluſieurs nombres complexes. 157
Exemples pour les monnoies. 158 & 159
Exemple pour l'étendue. 160
Exemple pour les poids. 161

CHAPITRE II. De la Souſtraction des nombres complexes. 162

Problême. Souſtraire un nombre complexe d'un autre nombre complexe ou incomplexe. 163
Exemples pour les monnoies. 164 & 165
Exemple pour l'étendue. 166
Exemple pour les poids. *ibid*

CHAPITRE III. De la Multiplication des nombres complexes. 168

Problême. Multiplier un nombre complexe compoſé de livres ſols & deniers, par un autre nombre complexe. 169
Parties aliquotes de la livre. 172
Méthode abrégée pour multiplier les ſols par des nombres entiers, & pour avoir au produit les livres que ce produit peut contenir. 173
Exemples. 174 & 175
Remarque. 176
Méthode pour multiplier les deniers par des nombres entiers, & pour avoir tout d'un coup les livres, les ſols & les deniers que le produit peut contenir. *ibid*
Exemples. 177 & 178
Remarque. 179
Démonſtration des deux méthodes qu'on a propoſées pour multiplier les ſols & les deniers. 180
Problême. Multiplier un nombre complexe compoſé de marcs, onces, &c, par un nombre incomplexe. 182
Avertiſſement ſur la multiplication géométrique. 183

Du Toiſé. 185

I. Un parallélograme eſt égal au produit de ſa baſe multipliée par ſa largeur ou hauteur. 186
Diviſion de la toiſe quarrée & des parties de la toiſe quarrée en parties analogues à la toiſe linéaire. 189
II. Un parallélépipede eſt égal au produit de la ſuperficie de ſa baſe multipliée par ſa hauteur. 191
Diviſion de la toiſe cube & des parties de la toiſe cube en parties proportionnelles à celles de la toiſe linéaire. 193
Valeur des différentes unités relatives à la toiſe linéaire, à la toiſe quarrée & à la toiſe cubique, avec les caracteres diſtinctifs de ces différentes unités 196
Problême. Multiplier l'un par l'autre deux nombres compoſés de toiſes linéaires & de parties de toiſe linéaire. 198
Problême. Second exemple de la multiplication précédente. 200
Problême. Multiplier un nombre compoſé de toiſes quarrées & de parties de la toiſe quarrée, par un nombre compoſé de toiſes linéaires & de parties de la toiſe linéaire. 201
Problême. Multiplier enſemble trois nombres compoſés de toiſes linéaires & de parties de la toiſe linéaire. 203
Remarque. Regle pour réduire les méſures ſuperficielles non quarrées & moindres que la toiſe quarrée, en pieds, pouces & lignes quarrés, & pour réduire les meſures ſolides non cubiques & moindres que la toiſe cube, en pieds, pouces & lignes cubes. 204
Exemple pour les meſures quarrées. 206
Exemple pour les meſures cubiques. 209

Du Toiſé des Bois. 211

Problême. Toiſer une piéce de bois quarrée, & la réduire en piéces ou ſolives. *ibid*
I. Premiere maniere d'opérer. *ibid*
II. Seconde maniere. 212
III. Troiſiéme maniere. 214

CHAPITRE IV. De la Diviſion des nombres complexes. 217

Exemple I. Diviſer un nombre compoſé de livres, ſols & deniers, par un nombre incomplexe. 219
Exemple II. Diviſer un nombre compoſé de marcs, onces, gros, &c, par un nombre complexe. 221
Exemple III. Diviſer un nombre compoſé de livres, ſols & deniers, par un autre compoſé de livres, ſols & deniers. 224
Exemple IV. Diviſer un nombre compoſé de toiſes quarrées

& de parties de la toiſe quarrée, par un nombre compoſé de toiſes linéaires & de parties de la toiſe linéaire. 226
Exemple V. Diviſer un nombre compoſé de toiſes cubiques & de parties de la toiſe cubique, par un nombre compoſé de toiſes linéaires & de parties de la toiſe linéaire. 229
Remarque ſur la nature des unités du quotient, lorſque le dividende eſt compoſé de toiſes cubiques & de parties de la toiſe cubique, & que le diviſeur eſt compoſé de toiſes quarrées & de parties de la toiſe quarrée. 230

LIVRE V.

Des Proportions & des principales Regles qui en dépendent.

CHAPITRE I. Des Proportions en général. 231

Il n'y a de rapport arithmétique ou géométrique qu'entre les quantités de même eſpéce. Le rapport arithmétique eſt toûjours une grandeur de même eſpéce que celles qui ſont comparées. Le rapport géométrique au contraire eſt toûjours un nombre abſtrait, & ce nombre eſt le quotient de la diviſion de l'une de ces grandeurs par l'autre. 232
Deux rappports égaux ſont une proportion géométrique. 234
Théorême. On aura le quatriéme terme d'une proportion géométrique, en multipliant le troiſiéme terme par le quotient du ſecond diviſé par le premier. *ibid*
Corollaire I. On aura le quatriéme terme d'une proportion en multipliant le troiſiéme par le ſecond, & diviſant le produit par le premier. 235
Corollaire II. On pourra changer d'ordre le ſecond & le troiſiéme termes, ſans qu'il en arrive aucun changement dans le quatriéme. 237
Corollaire III. Le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens. 238
Corollaire IV. Chaque extrême eſt égal au produit des moyens diviſé par l'autre extrême, & chaque moyen eſt égal au produit des extrêmes diviſé par l'autre moyen. *ibid*

CHAPITRE II. De la Regle de Trois & de ſes différentes eſpéces. 239

De la Régle de Trois Directe ſimple. 241
Exemples. *de 244 à* 247
Corollaire. L'unité étant le premier terme d'une Régle de Trois, on trouve le quatriéme terme en multipliant ſeulement le ſecond terme par le troiſiéme, ou le troiſiéme par par le ſecond. 247

Obſervation. On ne doit cependant pas ſupprimer ce premier terme lorſqu'il eſt une unité concrete, parce qu'il ſert à fixer la nature des unités du quatriéme ; & ces ſortes de Régles de Trois ne peuvent pas être regardées comme de ſimples multiplications. *ibid*
De la Régle de Trois Directe compoſée. 249
Exemples. *de* 250 *à* 256
De la Régle de Trois Inverſe ſimple. 257
Exemple. *ibid*
Remarque. La Régle de Trois inverſe ſe réduit à une Régle de Trois compoſée dont les termes ſont égaux deux à deux. 258
De la Régle de Trois inverſe compoſée. 259
Exemple. *ibid*
Remarque. 260
CHAPITRE III. Des Regles de Compagnie. 261
Exemples. *de* 262 *à* 266
CHAPITRE IV. Des Regles de Fauſſes poſitions. 266
Des Régles d'Une fauſſe poſition. 267
Exemples. *de* 267 *à* 269
Des Régles de Deux fauſſes poſitions. 269
Exemples. 270

LIVRE VI.

De la Regle d'Alliage.

Problême. Lorſqu'on connoit la valeur & le nombre des différentes choſes qui entrent dans la compoſition du corps allié, trouver la valeur des unités du corps allié. 274
Exemples. *de* 274 *à* 276
Problême. Deux unités de différentes valeurs étant données, trouver quelles parties il en faudra prendre, pour compoſer une unité d'une valeur moyenne donnée. 276
Exemples. *de* 277 *à* 280
Problême. Faire une ſomme propoſée avec deux ſortes de piéces, de chacune deſquelles la valeur ſera donnée, & dont le nombre total ſera auſſi déterminé. 281
Exemples. *de* 281 *à* 288
Problême. Faire une ſomme propoſée avec trois ſortes de piéces, dont le nombre total ſoit donné avec la valeur de chacune en particulier. 288
Exemples. *de* 290 *à* 296
Problême. Faire une ſomme propoſée en quatre ſortes de piéces, dont le nombre total ſoit donné avec la valeur de chacune en particulier. 297
Exemple. *ibid*

LIVRE VII.

De la Compoſition des Quarrés & des Cubes, & de l'Extraction de leurs Racines.

CHAPITRE I. De la Compoſition des Quarrés & de l'Extraction des Racines quarrées. 301

La racine quarrée d'un nombre compoſé d'un ou deux chiffres, n'aura qu'un ſeul chiffre. 302
Celle d'un nombre compoſé de plus de deux chiffres aura plus d'un chiffre. *ibid*
Table des quarrés depuis 1 juſqu'à 100 avec leur racines 303.

De la Compoſition des Quarrés.

I. Un quarré, ou le produit d'une ligne compoſée de deux parties multipliée par elle-même, contient le quarré de la premiere partie, plus deux fois le produit de la premiere partie multipliée par la ſeconde, plus le quarré de la ſeconde partie. 304
II. Le quarré d'un nombre entier compoſé de deux parties contient pareillement 1°. Le quarré de la premiere partie. 2°. Deux fois le produit de la premiere partie multipliée par la ſeconde. 3°. Le quarré de la ſeconde partie. 306
III. Le quarré d'un nombre quelconque partagé en un nombre de dixaines & en un nombre d'unités, contient le quarté du nombre des dixaines, plus le produit du double du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités, plus le quarré du nombre des unités. Arrangement de ces parties du quarré dans ce quarré. 306
IV. Décompoſition du quarré en parties relatives au nombre de dixaines & au nombre d'unités de ſa racine. 308

De l'Extraction des Racines quarrées.

Problême. Extraire la racine quarrée d'un nombre propoſé quelconque, ou du plus grand quarré contenu dans ce nombre. 309
Exemple I. II. III. & IV. 310, 314, 317 & 320
Remarque. I. Récapitulation des opérations qu'il faut faire pour l'extraction de la racine quarrée d'un nombre quelconque. II. Régle pour s'aſſûrer ſi la racine trouvée eſt aſſez grande. de 322 à 325
Problême. Approcher ſi près qu'on voudra de la racine quarrée d'un nombre qui n'eſt pas un quarré parfait. 325
Exemple. 327

Problême. Trouver la racine quarrée d'une fraction. 328

I. }
II. } Application de la Régle pour réſoudre ce Problême,
III. } aux différens cas qui peuvent arriver. de 328 à 331
IV. }

Problême. Trouver la racine quarrée d'un nombre complexe compoſé de toiſes quarrées & de parties de la toiſe quarrée. 331

CHAPITRE II. De la Compoſition des Cubes & de l'Extraction des Racines cubiques. 334

Lorſqu'un nombre n'a pas plus de 3 chiffres, ſa racine cubique ne peut avoir qu'un chiffre. 335

Lorſqu'un nombre a plus de 3 chiffres, ſa racine cubique a plus d'un chiffre. *ibid*

Table des cubes depuis 1 juſqu'à 1000 avec leurs racines 336

De la Compoſition des Cubes.

I. Un cube, ou le quarré d'une ligne compoſée de deux parties multiplié par cette même ligne, contient le cube de la premiere partie d'un de ſes côtés; plus 3 parallélépipédes égaux qui auront chacun pour baſe le quarré de la premiere partie, & pour hauteur ou épaiſſeur la ſeconde partie; plus 3 autres parallélépipédes égaux qui auront pour baſes des quarrés égaux à celui de la ſeconde partie, & pour hauteur la premiere partie; plus enfin le cube de la ſeconde partie. 337

II Le cube d'un nombre compoſé de deux parties, contient pareillement 1°. Le cube de ſa premiere partie. 2°. Le triple du quarré de la premiere partie multiplié par la ſeconde. 3°. Le triple du quarré de la ſeconde partie multiplié par la premiere. 4°. Le cube de la ſeconde partie. 338

III Le cube d'un nombre quelconque partagé en un nombre de dixaines & un nombre d'unités, contient le cube du nombre des dixaines de la racine; plus le produit de trois fois le quarré du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités, plus le produit de trois fois le quarré du nombre des unités multiplié par le nombre des dixaines; plus le cube du nombre des unités. Arrangement de ces différentes parties dans un cube. 339

Décompoſition du cube en parties relatives au nombre de dixaines & au nombre d'unités de ſa racine. 341

De l'Extraction des Racines cubiques.

Problême. Trouver la racine cubique d'un nombre, ou du plus grand cube contenu dans un nombre quelconque. 343

Exemple I. II. III. & IV. 343, 346, 348 & 350

Remarque. I. Récapitulation des opérations qu'on a faites pour l'extraction de la racine cubique. II. Régle pour reconnoître ſi la racine cubique trouvée eſt aſſez grande. *de* 352 *à* 355
Problême. Approcher ſi près qu'on voudra de la racine cubique d'un nombre qui n'eſt pas un cube parfait. 355
Exemple. 357
Problême. Trouver la racine cubique d'une fraction 358

I.
II. } Application de la régle pour réſoudre ce problême,
III. } aux différens cas qui peuvent arriver. *de* 359 *à* 361
IV.

Problême. Trouver la racine cubique d'un nombre complexe compoſé de toiſes cubiques & de parties de la toiſe cubique. 362

LIVRE VIII.

Des Proportions arithmétiques, des Progreſſions arithmétiques, des Progreſſions géométriques, & des Logarithmes.

CHAPITRE I. Des Proportions arithmétiques. 365

Une proportion arithmétique eſt compoſée de deux rapports arithmétiques égaux. 366
En renverſant l'ordre des termes d'une proportion arithmétique, on a une nouvelle proportion dont les extrêmes & les moyens ſont les mêmes que ceux de la premiere. 367
Ce que c'eſt qu'une proportion arithmétique continue. *ibid.*
Théorême. Dans toute propotion arithmétique, la ſomme des extrêmes eſt égale à celle des moyens. 368
Corollaire I. Si l'un des extrêmes de la proportion eſt 0, l'autre extrême eſt égal à la ſomme des moyens. 369
Corollaire II. Dans une proportion arithmétique continue, la ſomme des extrêmes eſt double du terme moyen. *ibid.*
Corollaire III. On aura celui qu'on voudra des deux { extrêmes / moyens } d'une proportion, en ajoûtant enſemble les deux { moyens / extrêmes } & retranchant l'autre { extrême / moyen } de leur ſomme. 370

CHAPITRE II. Des Progreſſions arithmétiques. 371

Corollaire I. Chaque terme d'une progreſſion arithmétique contiendra le premier plus ou moins la différence multipliée par le nombre des termes qui ſeront avant lui. 372

Corollaire II. Chaque terme différera du premier d'une quantité égale à la différence propre de la progreſſion, multiplié, par le nombre des termes qui ſeront avant lui. 373

Deux termes qui auront d'autres termes entr'eux, auront pour différence celle de la progreſſion, multipliée par un nombre plus grand d'une unité que celui des termes qui ſeront entr'eux. 374

Corollaire III. Les termes d'une même progreſſion arithmétique, ont entr'eux la même différence, lorſqu'ils ont entr'eux le même nombre de termes, 374

Corollaire IV. Quatre termes d'une progreſſion arithmétique, tels qu'il y ait autant de termes entre le premier & le deuxiéme, qu'entre le troiſiéme & le quatriéme, ſont en proportion arithmétique 374

Remarque ſur les nombres vrais & les nombres faux. 375

Théorême. La ſomme des deux extrêmes d'une progreſſion arithmétique, eſt égale à la ſomme de deux moyens pris à diſtances égales des extrêmes. 379

Corollaire. Si le nombre des termes de la progreſſion eſt impair, le terme du milieu ſera égal à la moitié de la ſomme des extrêmes. 380

Théorême. La ſomme de tous les termes d'une progreſſion arithmétique, eſt égale à la moitié de la ſomme des extrêmes multipliée par le nombre des termes de la progreſſion. *ibid*

Corollaire. On aura auſſi la ſomme de tous les termes d'une progreſſion arithmétique, en multipliant la ſomme des extrêmes par la moitié du nombre des termes. 381

Différentes queſtions dans la réſolution deſquelles on fait uſage des principes qu'on vient d'établir. *de* 381 *à* 386

CHAPITRE III. Des Progreſſions géométriques. 387

Une progreſſion géométrique qui n'a que trois termes s'appelle une proportion géométrique continue 388

Corollaire I. On peut repréſenter tous les termes d'une progreſſion géométrique croiſſante ou décroiſſante, en multipliant continuellement le premier terme par un même nombre plus grand ou plus petit que l'unité. *ibid*

Corollaire II. Ayant deux termes de ſuite d'une progreſſion, on pourra la continuer autant qu'on voudra ſoit en montant ou en deſcendant. 390

Corollaire III. Un terme quelconque d'une progreſſion géométrique, eſt compoſé du premier terme multiplié ou

diviſé autant de fois de ſuite par la raiſon de progreſſion, qu'il y a de termes avant lui. *ibid*
Corollaire IV. Quel que ſoit le nombre des termes qui ſe trouvent entre les deux termes que l'on compare, le ſecond eſt toûjours compoſé du premier multiplié ou diviſé par la raiſon de la progreſſion autant de fois de ſuite plus une fois, qu'il y a de termes entre ces deux termes comparés. 391
Corollaire V. Quatre termes d'une progreſſion géométrique dont le premier & le ſecond ont autant de termes entr'eux que le troiſiéme & le quatriéme, ſont en proportion géométrique, & réciproquement &c. 392
Trois termes pris de ſuite dans une progreſſion géométrique, ſont en progreſſion géométrique continue 393
Théorême. Lorſque trois termes ſont en proportion continue, le quarré du moyen eſt égal au produit des deux extrêmes. *ibid*
Corollaire. Le moyen d'une proportion continue eſt égal à la racine quarrée du produit des extrêmes. 394
Théorême. Le quotient d'une diviſion dont le dividende eſt plus grand d'une unité que le diviſeur, eſt égal à la ſomme de tous les termes d'une progreſſion géométrique décroiſſante compoſée d'une infinité de termes dont le premier eſt l'unité, & dont la raiſon eſt égale au dividende. *ibid*
Théorême. On aura la ſomme de tous les termes d'une progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini, quel que ſoit ſon premier terme, en diviſant la raiſon de cette progreſſion par un nombre plus petit qu'elle d'une unité, & en multipliant le quotient de cette diviſion par le premier terme de la progreſſion. 396
Corollaire I. Où l'on fait voir que le théorême eſt applicable à toutes les progreſſions arithmétiques décroiſſantes à l'infini. 398
Corollaire II. La ſomme de tous les termes d'une progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini, qui aura pour premier terme une fraction dont le dénominateur ſurpaſſera le numérateur d'une unité, & qui aura ce dénominateur pour raiſon, ſera égal à l'unité. 399
Théorême. On aura la ſomme d'un nombre quelconque de termes pris de ſuite dans une progreſſion géométrique, en diviſant la raiſon de la progreſſion par un nombre plus petit qu'elle d'une unité, en multipliant le quotient par la différence du plus grand terme au plus petit, & en ajoûtant le plus petit terme au produit de cette multiplication. *ibid*

CHAPITRE IV. Des Logarithmes & de leur uſage dans l'Arithmétique.

Définitions. 402
Corollaire I. Zéro eſt le logarithme de l'unité. *ibid*

Corollaire II. Les nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c ſont les Logarithmes des 2e, 3e, 4e, 5e, 6e, &c termes de la progreſſion décuple, ou de telle autre progreſſion dans laquelle on imaginera que tous les nombres ſont contenus. *ibid*

Corollaire III. On aura donc autant de ſyſtêmes de Logarithmes qu'on voudra conſidérer de progreſſions géométriques différentes; mais dans toutes ces progreſſions l'unité qui ſera toujours à l'origine, aura zéro pour logarithme. 403

Corollaire IV. Le logarithme d'un nombre, eſt le nombre des raiſons de la progreſſion, qui compoſent ce nombre par leur multiplication; d'où l'on conclud que le logarithme d'un nombre qui ſeroit infini ſeroit auſſi un nombre infini. 404

Corollaire V. Les termes de la progreſſion géométrique 1, 10, 100, 1000, &c, ayant pour logarithmes les termes correſpondans de la progreſſion arithmétique 0, 1, 2, 3 &c; ſi l'on conſidére la même progreſſion géométrique en décroiſſant, ſes termes auront pour logarithmes les termes correſpondans de la progreſſion arithmétique décroiſſante 3, 2, 1, 0, &c: & ſi l'on continue la progreſſion géométrique au-deſſous de l'unité, ſes termes $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, &c auront pour logarithmes les termes correſpondans de la progreſſion arithmétique qui ſeront des nombres négatifs -1, -2, -3, &c. 405

Corollaire VI. 1°. Les nombres plus petits que l'unité ont pour logarithmes des nombres moindres que zéro.

2°. Deux termes de la même progreſſion, qui ſont à diſtances égales de l'unité, mais l'un eſt plus grand & l'autre plus petit que l'unité, ont le même nombre pour logarithme; avec cette différence que le logarithme du terme plus grand que l'unité, eſt un nombre vrai, & que celui du terme plus petit que l'unité eſt un nombre faux.

3°. Le logarithme de zéro, eſt un nombre infini négatif. 406

Avertiſſement. Des logarithmes des termes intermédiaires à ceux de la progreſſion décuple. 407

Caractériſtique du logarithme. 411

Les logarithmes de tous les nombres moindres que le dernier extrême de la progreſſion intermédiaire dans laquelle ils ſeront compris, auront pour caractériſtique le logarithme du premier terme de cette progreſſion. *ibid*

Table des logarithmes de tous les nombres depuis 1 juſqu'à 200. 412 & 413

Le caractériſtique du logarithme de chaque nombre contiendra autant d'unités moins une, qu'il y aura de chiffres dans ce nombre. On peut donc dans une table de logarithmes ſupprimer la caractériſtique. 414

Les logarithmes des nombres qui occupent des places ſemblables dans les différentes progreſſions intermédiaires, ont les mêmes chiffres décimaux *ibid*

Théorême. Lorſque quatre nombres ſont en proportion géométrique, leurs logarithmes ſont en proportion arithmétique. 415
Corollaire I. Si quatre nombres ne ſont point en proportion géométrique, leurs logarithmes ne ſeront point en proportion arithmétique. *ibid*
Corollaire II. Si quatre logarithmes ſont en proportion arithmétique, les quatre nombres auſquels ils appartiendront ſeront en proportion géométrique. 416
Corollaire III. Lorſque quatre nombres ſont en proportion géométrique, la ſomme des logarithmes des extrêmes eſt égale à la ſomme des logarithmes des moyens. *ibid*
Corollaire IV. Si l'unité eſt le premier terme d'une proportion géométrique, le logarithme du quatriéme terme ſera égal à la ſomme des logarithmes des deux termes moyens. 417
Corollaire V. Si trois nombres ſont en proportion géométrique continue, la ſomme des logarithmes des extrêmes eſt égale au double du logarithme du terme moyen. *ibid*

De l'Uſage des Logarithmes dans l'Arithmétique. 418

I. De leur uſage dans la multiplication. *ibid*
II. Dans la diviſion. 419
III. Dans la Regle de trois. 420
IV. Dans l'élévation d'un nombre au quarré ou au cube. Ou à d'autres puiſſances. *de* 421 *à* 422
V. Dans l'extraction des racines quarrées ou cubiques. Ou des racines 4e, 5e, &c. *de* 423 *à* 425

De la Conſtruction des Tables de Logarithmes. 425

Problême. Trouver le logarithme du nombre 3, ou en approcher juſqu'à 7 chiffres décimaux. 427
Table des moyens proportionnels géométriques & arithmétiques qu'il faut trouver pour y parvenir. 431
Problême. Trouver le logarithme d'une fraction dont le numérateur ſurpaſſe le dénominateur d'une unité, & pouſſer le calcul juſqu'à ce que le logarithme contienne dix chiffres décimaux. 432
Exemples. *de* 432 *à* 435
Problême. Connoiſſant le logarithme d'une fraction & celui de l'un de ſes termes, trouver le logarithme de l'autre terme. 435
Exemples. 436
Problême. Conſtruire une table de Logarithmes, en ſuppoſant que les logarithmes des termes de la progreſſion géométrique décuple 1, 10, 100, 1000, 10000, &c, ſont 0, 1, 2, 3, 4 &c. 437

Queſtions qu'on peut réſoudre par le moyen des Logarithmes.
Queſtion premiere. Le premier terme & la raiſon d'une progreſſion géométrique étant donnés, trouver le numéro d'un terme égal à un nombre propoſé. 440
Exemples. 443
Remarque. Regle pour trouver le numéro d'un terme connu d'une progreſſion géométrique, lorſque l'unité eſt le premier terme. Moyen d'appliquer les exemples à des progreſſions décroiſſantes. 444
Autres queſtions, &c. *de* 444 *à* 448

LIVRE IX.

Des Changemens d'Ordre & des Combinaiſons.

CHAPITRE I. Des Changemens d'Ordre ou Permutations. 450

CHAPITRE II. Des Combinaiſons. 453

I. Combinaiſons qui renferment les changemens d'ordre des choſes combinées, & dans leſquelles la même choſe eſt répetée pluſieurs fois. 454
II. Combinaiſons qui renferment les changemens d'ordre des choſes combinées, & dans leſquelles la même choſe n'eſt pas répétée pluſieurs fois. 456
III. Combinaiſons qu'on peut faire en n'employant point une choſe pluſieurs fois en même temps, & en n'ayant point égard aux changemens d'ordre que les choſes combinées peuvent recevoir. 460

Fin de la Table.